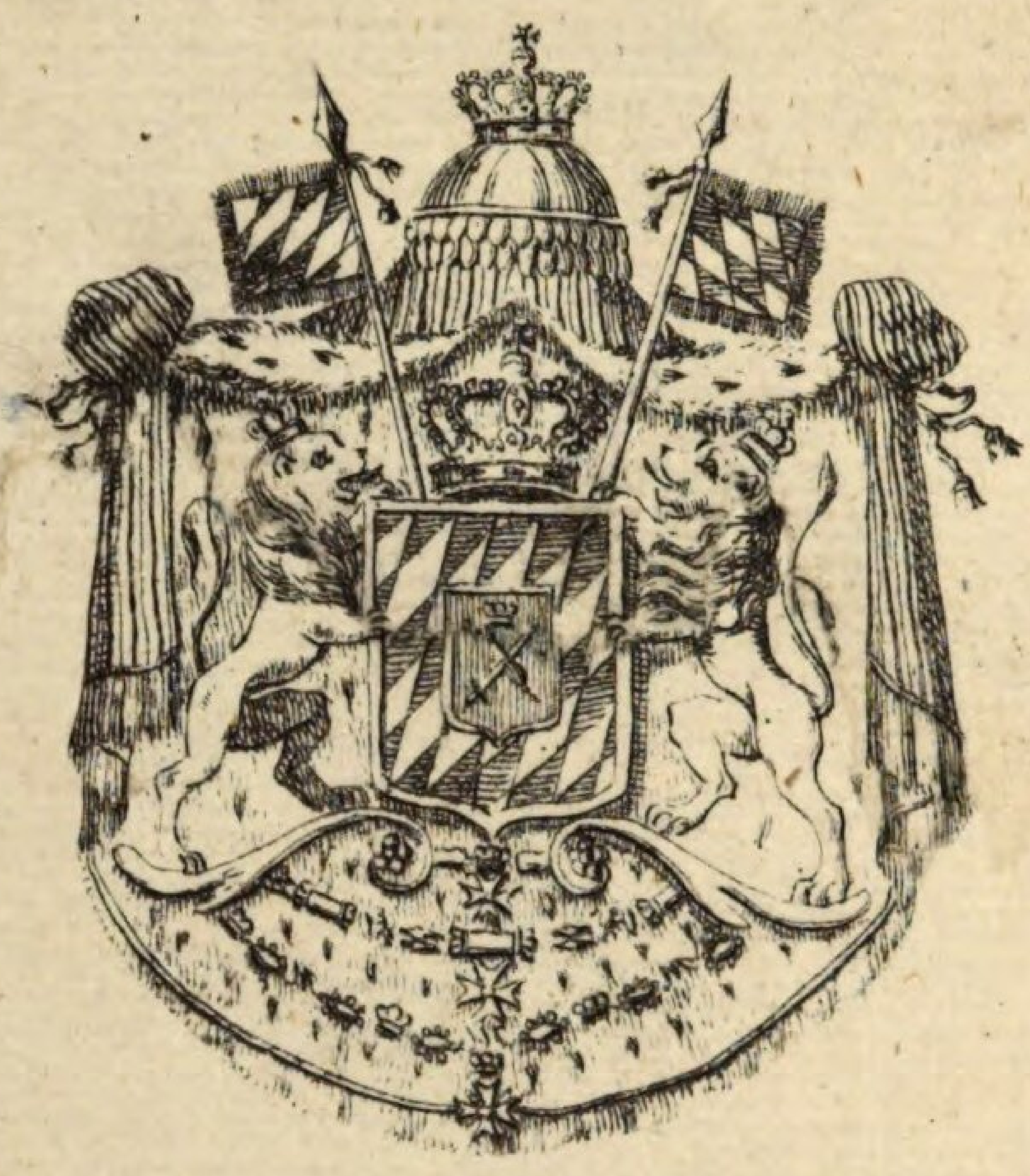
Ath. p. 270 m-1



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

53

FT

Math. P 270 m/Cl.

<36604229760019

<36604229760019

Bayer. Staatsbibliothek

53 B

Geometrische Constructionslehre

für

Lehrer und Lernende.

Ein Versuch

geometrischer Geistesgymnastik

von

J. F. Ladomus.

Professor an der Ingenieurschule zu Carlsruhe.

Mit 17 Kupfertafeln.

Freyburg und Konstanz,
in der Herder'schen Buchhandlung.
1812.

R
104. C.

Math. P. 270 m/a

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Non multa sed multum.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

B

Seiner Königlichen Hoheit
dem
Durchlauchtigsten
Großherzog von Baden,
Carl,
dem
Beschützer der Wissenschaften und Künste,
dem
großmüthigen Beförderer alles Wahren,
Guten und Schönen,
seinem
gnädigsten Herrn und Souverain
widmet
diese Blätter
als
ein kleines Zeichen seiner tiefsten Verehrung
allerunterthänigst

Der Verfasser.

Vorerinnerung.

Obgleich schon Socrates und die Platonische Schule die Mathematik als Hauptbildungsmittel für den menschlichen Geist erkannten und behandelten, soschien doch nach ihnen gedachte Ansicht im Strudel der Zeiten, wo nicht ganz, doch größtentheils verloren gegangen zu seyn.

Die Anwendbarkeit der Mathematik im praktischen Leben zeigte sich; nun suchte man blos die Früchte zu erhaschen, und vergaß ob diesem Streben die Bildung der Fruchterzeugenden Kraft, ganz gegen das bekannte, aber leider nicht immer befolgte „non multa sed multum," welche Worte ohngefähr im nämlichen Verhältnisse stehen, wie fragmentarische Kenntnisse und reife Erkenntnißkraft, wie mechanische Fertigkeiten und Kunstbewußtseyn ꝛc.— Bald mehr, bald minder gieng dieser blos praktische Nutzbarkeit suchende Geist in Lehre und Schriften über. Es erschienen Ausgaben von Euclid, die jedem Satze seine Nutzanwendung gaben, ja sogar Schriften die nur Fertigkeiten erzielten.

Endlich aber verlor sich immer mehr und mehr der Wahn, als könne von irgend einer Wissenschaft geistvolle Anwendung gemacht werden ohne gebildete anwendende Kraft selbst. —

Den neuern und neuesten Zeiten, und den darin lebenden Psichologen und Philosophen war es vorbehalten, die Mathematik in ihre eigentliche Rechte wieder einzusetzen und ihr Verhältniß zum Menschen, als solchem, und zum Staatsbürger mehr in's Klare zu bringen. Jedoch

gieng es auch hier wie gewöhnlich bey Aenderung einer Ansicht im Leben. Viele verfolgten in ihrem Eifer das entgegengesetzte Extrem Es gab Lehre und Schriften, welche die Wissenschaft entweder blos subjectiv oder blos objectiv behandelt hätten, wenn es möglich gewesen wäre. Die Erstern, der Wissenschaft größtentheils nicht Meister, einzig aufs Subject Rücksicht nehmend, verloren sich in's Breite, und die Andern waren aus Mangel an Jugendkunde, zu conzentrirt, nur den besten Köpfen genußreich. Jene nahmen die menschlichen Anlagen und Fähigkeiten allein zu Construktionsmitteln der Wissenschaft, und diese wählten einzig die in der Wissenschaft, objectiv gefaßt, enthaltenen Prinzipien dafür. Wenige nur versuchten den glücklichen Mittelweg, der die objective und subjective Ansicht freundlich vereint, und indem er die Kräfte psychologisch entwickelt, als Gewinn dieser Entwicklung die Wissenschaft giebt, an alle drey Grade der Fähigkeiten sich anschließend, die Schwächern hebend, den Bessern genügend, und den Ausgezeichneten zur Höhe der Wissenschaft den Weg bahnend. Offenbar die schwierigste Aufgabe, und nur dem umfassend meßbar, der sie selbst in irgend einem Fache zu lösen versuchte. — Als einen kleinen Beytrag zu diesem allgemeinen Versuch, übergebe ich hier dieses Werkchen dem sachkundigen Publikum zur Beurtheilung. Es ist Produkt sechsjähriger Erfahrung, die mich immer mit erfreuendem Erfolge lohnte, und jeden darnach treu unterrichtenden Lehrer damit lohnen wird. Reiht derselbe an das darin Abgehandelte die Vieleckszeichnung und die Berechnung der darin vorkommenden ebenen Flächen, was beydes so leicht ist,

daß ich's wirklich zur Vermeidung der dadurch nöthig gewordenen Kupfertafeln und Textvermehrung für überflüßig hielt es selbst zu thun, so hat er alles, was objectiv und subjectiv nach meiner Ansicht von einem ersten wissenschaftlichen Cursus der sogenannten Longi und Planimetrie in Schulen begehrt werden kann. Lehrt er endlich noch das Planzeichnen, wozu die Theorie in dem Capitel, Polyplanimetrie überschrieben, einfach, gründlich und so kurz wie vielleicht nirgends enthalten ist, nebst dem als Anwendung der Gleichheits- und Aehnlichkeitslehre von selbst sich ergebenden Aufgaben der Höhen- und Breitenmessungen, so wird er auch die blos auf praktische Fertigkeit sehende Menge befriedigen.

Um dem Werkchen die möglichste Brauchbarkeit zu geben, habe ich eine Darstellungsform gewählt, die dem Lehrer als Leitfaden und dem Lernenden zur Wiederholung dienen könne. Daher die anscheinende Weitläufigkeit im Anfange und immer mehr gegen das Ende zunehmende Kürze; daher endlich nur manche Andeutungen von Beweisen, Aufgaben rc. Der Lehrer kennt das Object, und kann die Andeutungen im Vortrage nach Zeit und Umständen ausführen, und der Zuhörer zu seiner Bildung mit Freyheit nachbilden. Man sieht wohl von selbst ein, daß die Darstellungsform größtentheils dogmatisch seyn mußte, indem sie ja eine aus der Analysis und Synthesis des Gegenstandes nebst sorgsamer Beobachtung der Entwicklungsgesetze des menschlichen Geistes hervorgehende festbestimmte Behandlungsform für den Unterricht beabsichtigen sollte. Die hie und da einzeln eingestreuten didactischen Winke werden jedem nur etwas sinnvollem Leh-

rer schon genügen, um durch Fragen, Aufgaben rc. cathechetisch und Geistes gymnastisch in die mündlichen Unterweisungen Geist und Leben zu bringen, so wie die am Ende sich befindenden allgemeinen und besondern Bemerkungen über die Tabellen (Kupfertafeln) ihm einen leichten systematischen Ueberblick über den ganzen Inhalt gewähren. — Daß die geometrischen und überhaupt reinmathematischen Kenntnisse nicht Gedächtnißwerk seyn sollen, sondern Erzeugnisse vernünftig geleiteter Selbstthätigkeit, wünschte ich schon im Titel anzudeuten, und so entstand der Name geometrische Construktionslehre.

Möge sie mit eben so gutem Willen aufgenommen werden, als sie aus reinem Triebe zu nützen gegeben wurde. Der Ausspruch und die Zurechtweisungen der Kenner werden mich bestimmen auf diesem betretenen Wege fortzufahren oder ihn zu ändern. Zur nähern Würdigung meiner diesfallsigen Grundsätze muß ich dieselben auf meine frühern methodisch-mathematischen Abhandlungen verweisen, hauptsächlich auf die letzte „Beytrag zur Methodik der reinen Mathematik überhaupt und der Langsdorfischen Raumtheorie insbesondere." — Die elementarische Behandlung der Ellipse und die als Anhang beygefügte Schwerpunktsaufgaben hoffe ich für denkende Lehrer nicht ohne Erfolg angedeutet zu haben. — Findet gegenwärtige Schrift Beyfall, so soll künftig für höhere Klassen eine ähnliche methodische Behandlung der Stereometrie und der Kegelschnitte folgen, und zwar letztere nach ihren dreyfachen Ansichten, a. analytisch, b. geometrisch, und c. technisch, wo ich mich dann auch über diese Eintheilungsweise näher erklären werde. —

Der Verfasser.

Erklärungen.

Ein geometrischer Körper ist der physische (wirkliche) Körper blos in Hinsicht auf Größe und Form betrachtet. *)

Ein geometrischer Körper ist demnach alles, was drey Ausdehnungen hat, a) Länge, b) Breite und c) Dicke, Tiefe oder Höhe. **)

An einem Körper sieht man nur seine Gränzen.

Die Gränzen eines Körpers nennt man Flächen.

Die Flächen haben nur zwey Ausdehnungen: a) Länge und b) Breite.

---

*) Es wird vorausgesetzt, daß der Lehrer geometrisch, von Holz, Pappe oder einer andern Materie geformte Körper vorzeige, um dadurch seine Erklärungen zu erleichtern.

**) Hier giebt der Lehrer passende Beyspiele, um seinen Zöglingen den richtigen Gebrauch der Worte: Dicke, Tiefe und Höhe, beyzubringen, und zugleich anschaulich zu machen, daß diese Worte doch nur ein und ebendieselbe Ausdehnung (Abmessung) bedeuten, und ihr Unterschied größtentheils auch die Lage des Beschauers zu dieser Abmessung mit anzeigt. — Werden dergleichen Erörterungen mit psychologisch pädagogischem Takte beygebracht; so sind sie bildender, als es bloßen Theoretikern in der Unterrichtskunst scheinen mag.

Die Gränzen der Flächen sind Linien.

Die Linien haben nur eine Ausdehnung: **Länge.**

Die Gränzen der Linien sind Punkte.

Punkte haben gar keine Ausdehnung.

Flächen, Linien und Punkte kann man also nicht allein für sich, sondern nur an und vermittelst Körpern sehen und wahrnehmen. *)

Wollte man daher Flächen und Linien unter sich betrachten und vergleichen; so müßte man die Körper, an denen sie sich vorfinden, selbst haben. Um dieser großen Unbequemlichkeit nun zu entgehen, hat man Zeichen erfunden, welche die wirklichen Punkte, Linien und Flächen vorstellen.

Die Kunst, welche solche Zeichen kennen und verfertigen lehrt, und vermittelst derselben die Einsicht über räumliche Verhältnisse beybringt, heißt **geometrische Constructions-Lehre.**

Wahlsätze.

Man stellt sich ein Punkt durch ein Zeichen vor, das nur so viele Ausdehnung in Länge, Breite und Dicke hat, als nöthig ist, dem Auge sichtbar zu seyn. **)

Wenn man ein solches Zeichen eines Punktes von einem Orte zum andern bewegt; so entsteht das Zeichen einer Linie, d. h. eine Ausdehnung mehr oder minder beträcht-

*) Auch hier muß der Lehrer einige den Unterschied von sehen und wahrnehmen anschaubar machende Beyspiele anführen.

**) Wie der Lehrer dieses sagt, macht er mit der Kreide auf der Tafel, oder dem Bleystifte auf dem Papier, einen Punkt, und wenn er von Linien spricht, Linien; kurz seine Hand folgt seinen Worten, und bestätigt die Wahrheit derselben.

lich in die Länge, aber nur so viel in die Breite und Dicke, als nöthig ist, dem Auge sichtbar zu seyn.

Die Materien, womit solche Zeichen gemacht werden, sind theils nasse, wie Tinte und Tusche, theils trockene, wie Reisbley, gemeine, schwarze und spanische Kreide. — Da erstere gar nicht, und letztere sehr unbequem mit bloßen Händen zu gebrauchen sind; so hat man darauf gedacht, dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, indem man Stiele oder Handhaben für diese Materien erfand. So entstanden nach und nach die Einrichtungen der Federn, Bleystifte, Portcrayons, Reisfedern und Pinsel.

Das, worauf solche Zeichen gemacht werden, sind eigentlich Flächen. Weil wir aber diese nicht an und für sich, sondern nur als Gränzen der Körper in der Wirklichkeit haben können; so gebraucht man Körper dazu, wie Schiefertafeln, Papier ꝛc.

Indem eine der obengenannten Materien sich auf den Flächen solcher Körper hinbewegt; so reibt sie sich mit ihnen wechselseitig ab, wie z. B. bey der Bewegung des Schieferstiftes auf einer Schiefertafel, oder das Abreiben geschieht nur von einer Seite, wie dies z. B. bey der Bewegung des Bleystifts auf Papier der Fall ist.

Das Abgeriebene bleibt bey der fortgesetzten Bewegung zurück, und macht dadurch den Weg, den der bewegte Punkt genommen hat, sichtbar. Dieser sichtbare Weg ist nun das Zeichen der Linie. *)

---

*) Man kann auch, wenn der Lehrer es seinen Zöglingen angemessen findet, noch genauer auf die verschiedenen Ziehungsarten der Linienzeichen Rücksicht nehmen, also erwähnen, daß man nicht allein durch Auftragung, sondern auch durch Hinwegnahme (durch Eingraben) zeichnen kann, wie beym Kupferstechen.

Der Kürze wegen soll hinfort das Zeichen eines Punktes Punkt, das Zeichen einer Linie Linie heißen.

Von den Produkten der Bewegung eines Punkts.

Verändert der Punkt in seiner Bewegung niemals seine anfängliche Richtung; so beschreibt er eine gerade Linie.

Verändert der Punkt nur einmal seine Richtung; so beschreibt er eine aus 2 geraden Linien, die nicht gleiche Richtung haben, zusammengesetzte Linie, die man einfach gebrochene Linie nennt.

Verändert der Punkt in seiner Bewegung nur dann und wann, aber mehr, als einmal, seine Richtung; so beschreibt er eine aus eben so vielen minder einer geraden Linie, die nicht gleiche Richtung haben, zusammengesetzte Linie, als er seine Richtung veränderte, die man 2, 3, 4, 5 ꝛc. = fach gebrochene Linie nennt.

Verändert der Punkt in seiner Bewegung alle Augenblicke, aber doch nach einerley Weise seine Richtung; so beschreibt er eine einfach gebogene krumme Linie.

Verändert der Punkt in seiner Bewegung alle Augenblicke seine Richtung nach mehrerley Weise; so beschreibt er eine eben so vielfach gebogene krumme Linie.

Verändert der Punkt abwechselnd alle Augenblicke, und dann und wann seine Richtung; so beschreibt er eine aus geraden und krummen Linien zusammengesetzte Linie, welche man gemischte Linie nennt.

Von den Produkten der Bewegung eines Punkts in Beziehung auf einen andern gegebenen.

Der zu bewegende Punkt kann:

A. Sich dem gegebenen Punkte nähern und von demselben sich entfernen, und zwar:

1) in gerader Linie,

2) in einfach) mehrfach) gebrochener Linie.

3) in einfach) mehrfach) gebogener krummer Linie.

4) in gemischter Linie.

B. Sich weder nähern, noch entfernen, und doch um den gegebenen Punkt sich bewegen, und in seinen anfänglichen Ort zurückkehrend.

Die in diesem Falle entstandene geschlossene krumme Linie heißt Kreislinie, die also durch die Entfernung des ersten und zweyten Punkts bestimmt ist, welche Entfernung einfach genommen man Halbmesser oder Radius, und in gerader Linie doppelt genommen Durchmesser oder Diameter nennt.

Betrachten wir die bisher entstandenen Linien; so finden wir, weil die gebrochenen und gemischten Zusammensetzungen von geraden und krummen Linien sind, daß es nur zwey Hauptarten von Linien giebt, nämlich gerade und krumme.

Betrachten wir diese etwas genauer; so finden wir, daß

I. Eine gerade Linie diejenige ist:

a) In welcher alle Theile gleiche Richtung haben.

b) Die den kürzesten Weg von einem Punkt zum andern, und also die eigentliche Entfernung derselben darstellt.

c) Deren Richtung durch zwey Punkte bestimmt ist.

Zwischen zwey Punkten kann also nur eine einzige gerade Linie gezogen werden.

II. Eine krumme Linie diejenige ist:

a) In welcher jeder Theil eine andere Richtung hat.

b) Die nicht den kürzesten Weg zwischen zwey Punkten darstellt.

c) Deren Richtung durch mehr als zwey Punkte bestimmt werden muß.

Zwischen zwey Punkten kann also eine Menge krummer Linien gezogen werden, und jede ist ein Umweg.

Von den Produkten der geraden Bewegung eines Punktes, in Beziehung auf eine gegebene gerade Linie.

Der zu bewegende Punkt kann liegen:

A. In der gegebenen Linie selbst. (Fig. a und b.)

B. In ihrer Verlängerung. (Fig. c.)

C. Außer der Linie. (Fig. d.)

A.

In der Linie selbst kann er liegen.

a) An einem der beyden Endpunkte, (Fig. a.) oder

b) Innerhalb, zwischen denselben. (Fig. b.)

Im ersten Falle kann er

1) In der Richtung der Linie sich bewegen, folglich die Linie verlängern.

Das dadurch Entstandene ist eine gerade Linie, deren Länge gleich ist der Länge der gegebenen geraden Linie mehr ihrer Verlängerung.

Wenn also jede von zwey geraden Linien, welche gleiche Richtung die andere an einem ihrer Endpunkte berührt; so entsteht ebenfalls eine gerade Linie, deren Länge gleich ist der Länge beyder Linien, vor ihrer Zusammensetzung oder Verbindung.

2) Eine andere Richtung nehmen und dadurch eine gerade Linie beschreiben, deren Anfangspunkte mit einem der Endpunkte der gegebenen geraden Linie verbunden, und deren Richtung gegen die Richtung der gegebenen Linie verschieden ist. Das dadurch Entstandene nennt man Winkel.

Wenn also jede von irgend zwey geraden Linien, welche ungleiche Richtung haben, die andere an einem ihrer Endpunkte berührt; so entsteht ein Winkel.

Der Punkt, wo sie sich berühren, heißt der Scheitelpunkt des Winkels, und die Linien, die ihn bilden, Schenkel des Winkels. *)

Wenn die Schenkel eines Winkels so miteinander verbunden sind, daß sie sich weder gegen, noch von einander neigen; so heißt dieser Winkel ein rechter Winkel.

Da es nur eine Lage geben kann, in welcher der eine Schenkel des Winkels sich von dem andern weder zu, noch abneigt; so folgt, daß ein rechter Winkel immer dieselbe Größe hat, folglich alle rechte ∠ einander gleich seyn müssen.

---

*) Der Lehrer zeichnet alle 3 Arten ∠ zugleich.

Der leichten Uebersicht wegen ist die gegebene Linie etwas stärker gezeichnet, als die durch des Punkts Bewegung entstandene, aus gleichem Grunde ist auch der gegebene Punkt groß vorgestellt.

Neigen sich die Schenkel eines Winkels gegen einander; so heißt dieser ∠ ein spitzer ∠.

Da der eine Schenkel sich bald mehr, bald weniger dem andern zuneigen kann, und dadurch einen bald kleinern, bald größern ∠ bildet; so folgt, daß nicht alle spitze ∠ gleich groß, aber immer kleiner, als ein rechter ∠ sind.

Weichen die Schenkel eines ∠ von einander; so nennt man diesen ∠ einen stumpfen ∠.

Auch hier kann der eine Schenkel bald mehr, bald weniger von dem andern abweichen, und dadurch einen bald größern, bald kleinern ∠ bilden, daher folgt ebenfalls, daß nicht alle stumpfe ∠ einander gleich groß, aber immer größer, als ein rechter ∠ sind.

Im zweyten Falle, wenn der Punkt innerhalb der Linie angenommen ist, kann er ebenfalls wieder

1) In der Richtung der Linie sich bewegen, und dadurch die Linie verlängern.

Das dadurch Entstandene ist eine gerade Linie, deren Länge gleich ist der Länge der gegebenen Linie mehr dem Weg, den der Punkt außerhalb der Linie machte, denn der Weg, den er noch innerhalb der Linie machte, fällt ja mit derselben in einander, und trägt folglich zu ihrer Verlängerung nicht bey.

Wenn also zwey gerade Linien zum Theil in einander fallen; so haben sie einerley Richtung. *)

2) Eine andere Richtung nehmen, folglich eine gerade

---

*) Auf diesen Satz gründet sich das Verfahren, 1) mit kurzen Linealen lange Linien zu ziehen. 2) Mit wenig Stäben lange Linien abzustecken. 3) Eine gerade Linie zwischen zwey Punkten abzustecken, welche man nicht beyde hinter einander sehen kann, z. B. über einen Berg, Wald.

Linie beschreiben, die mit der gegebenen zwey ∠ bildet, welche man Neben∠ nennt. *)

Wenn also eine von irgend zwey geraden Linien mit einem ihrer Endpunkte, die andre zwischen ihren Endpunkten berührt; so entstehen Nebenwinkel.

Nebenwinkel haben einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt und Schenkel, und die beyden übrigen liegen in einer geraden Linie.

Neigt sich der gemeinschaftliche Schenkel gegen den einen oder den andern der beyden übrigen weder zu noch ab; so sind die Neben∠ rechte ∠: denn nach dem Vorhergehenden bildet er mit jedem einen rechten ∠, folglich mit beyden zwey rechte ∠.

Neigt sich der gemeinschaftliche Schenkel aber dem einen zu oder ab; so muß er sich um den nämlichen ∠ von der recht ∠ Lage entfernen, folglich auch um ebensoviel von dem andern Schenkel im ersten Falle ab- und im zweyten zuneigen, das heißt, er wird zwey ∠ bilden, wovon der eine ein spitzer, und der andere ein stumpfer ∠ ist, deren Summe doch aber nur zwey rechte ∠ ausmacht.

Neben∠ sind also immer gleich zwey rechten ∠.

Der Neben∠ eines rechten ∠ ist ein rechter ∠.

Der Neben∠ eines spitzen ∠ ist ein stumpfer ∠.

Der Neben∠ eines stumpfen ∠ ist ein spitzer ∠.

Wenn einer von zwey Neben∠ ein rechter ist, so ist der andere völlig bestimmt.

Wenn einer von zwey ∠ ein spitzer oder ein stumpfer ∠

---

*) Hier zeichnet der Lehrer auch gleich alle Arten Neben∠.

ist, so ist der andere nur der Winkelart nicht der Größe nach bestimmt.

B.

Liegt der bewegende Punkt in der Verlängerung der Linie; so kann er (Fig. c. und die folg.)

1) In der Richtung der Linie sich bewegen, und dadurch

a) Verlängerung derselben bilden und zwar einseitige oder doppelseitige; je nachdem er seine Bewegung nur bis an und in oder über die Linie fortsetzt.

Die im letzten Falle entstandene Linie ist gleich dem Weg, den der Punkt genommen hat: denn die gegebene Linie fällt ganz innerhalb derselben.

Diese Art Linien zu verlängern ist von der vorigen dadurch unterschieden:

Daß bey jener nur einseitige und bey dieser auch doppeltseitige Verlängerung statt finden kann;

Daß bey jener sich der gegebene Punkt von der gegebenen Linie entfernen, hier aber derselben sich nähern, oder nähern und entfernen muß.

b) Eine gerade Linie bilden, die in der Verlängerung der gegebenen liegt, und zwar kann dies der Punkt auf zweyerley Art; entweder von der Linie sich entfernend, oder sich ihr nähernd.

Die im lezten Falle gebildete Linie ist immer kleiner als die Entfernung von seiner anfänglichen Lage zu dem ihm am nächsten liegenden Endpunkte der gegebenen Linie, denn sie ist ja nur ein Theil der Entfernung.

2) Eine andere Richtung nehmen, und dadurch eine

gerade Linie bilden, die mit der gegebenen weder verbunden ist noch gleiche Richtung hat.

Die Lage dieser Linie kann dreyerley seyn.

a) So, daß wenn die gegebene Linie hinlänglich verlängert wird, ein rechter ∠ entsteht.

Hier kann der Punkt nur eine Richtung nehmen; weil alle rechte ∠ einander gleich sind.

b) So, daß wenn die gegebene Linie verlängert wird, ein spitzer ∠ entsteht.

Hier kann der Punkt mehrere Richtungen nehmen, weil nicht alle spitze ∠ einander gleich sind.

c) So, daß durch die Verlängerung der gegebenen Linie ein stumpfer ∠ entsteht.

Hier kann der Punkt ebenfalls verschiedene Richtungen nehmen; weil nicht alle stumpfe ∠ einander gleich sind.

C.

Ist der Punkt ausserhalb der Linie gegeben, so kann er sich so bewegen: (Fig. d. und die folg.)

1) Daß er nur einen ∠ mit der gegebenen Linie bildet, indem er alsdann seine Richtung nur gegen einen der Endpunkte der gegebenen Linie zu nehmen braucht.

2) Daß er Nebenwinkel mit der gegebenen Linie bildet, und zwar auf zwey Arten.

a) Wenn die Richtung seiner Bewegung auf einen zwischen den Endpunkten der gegebenen Linie angenommenen Punkt geht.

Diese Zeichnungsart der ∠ und Nebenwinkel ist von der vorhergehenden dadurch unterschieden, daß bey ihnen der Punkt von der gegebenen Linie entfernend, und hier

ihr sich nähernd bewegt, und bey jenen der Punkt, wo die zu zeichnende Linie mit der gegebenen verbunden seyn, und hier der Punkt, wo die zu zeichnende Linie sich ausserhalb derselbigen endigen soll, gegeben ist. Da es nur eine einzige Richtung, in welcher sich der Punkt recht ∠ bewegen kann, und auch nur einen kürzesten Weg giebt, auf welchem sich der Punkt der Linie nähern oder von ihr entfernen kann, so folgt, daß dieser die rechtwinkliche Lage hat.

Der kürzeste Weg, also auch die Entfernung eines Punktes zu einer geraden Linie ist folglich die rechtwinkliche Linie, die den Punkt mit der Linie verbindet.

b) Wenn er die Richtung seiner Bewegung zwar gegen einen der Endpunkte der Linie nimmt, sie aber über denselben fertsetzt, und dadurch rechte oder schiefe (stumpfe und spitze) Nebenwinkel bildet.

Diese Zeichnungsart ist verschieden von den vorigen dadurch, daß sie erst von der Bildung eines Winkels zur Bildung des zweyten schreitet, jene aber zu gleicher Zeit beyde Nebenwinkel bilden.

Aus ihr ergiebt sich auch folgende Zeichnungsart der Nebenwinkel: wenn man den Schenkel eines ∠ durch den Scheitelpunkt verlängert, so entsteht sein Nebenwinkel.

3) Daß er die Richtung seiner Bewegung zwar gegen einen zwischen den Endpunkten der gegebenen Linie liegenden Punkt nimmt, aber sie über dieselbe fortsetzt, und dadurch a) 4 Winkel, b) 4 Paar Nebenwinkel, und c) 2 Paar ∠ bildet, deren Schenkel wechselseitige Verlängerung sind: letztere nennt man Scheitelwinkel.

Da der Punkt in seiner Bewegung immer gerade Richtung behält, so nähert er sich der Linie in der nemlichen Richtung, in der er sich von derselben nachher entfernt; die ∠ auf der einen Seite der gegebenen Linie sind also einzeln genommen den ∠ auf ihrer andern Seite gleich. Scheitelwinkel sind also einander gleich.

Scheitelwinkel entstehen also, wenn 2 gerade Linien sich schneiden.

Rechte Scheitelwinkel werden durch den recht ∠ Durchschnitt zweyer gerader Linien gebildet.

Schiefe (spitze und stumpfe) Scheitelwinkel werden durch den schief winklichten Durchschnitt zweyer Linien gebildet.

Der Scheitelwinkel eines gegebenen ∠ ist derjenige ∠, welcher einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt mit dem gegebenen hat, und dessen Schenkel die Verlängerungen der Schenkel des gegebenen ∠ sind.

Der Scheitelwinkel eines rechten ∠ ist ein rechter ∠.

Der Scheitelwinkel eines spitzen ∠ ist ein ihm gleicher spitzer ∠.

Der Scheitelwinkel eines stumpfen ∠ ist ein ihm gleicher stumpfer ∠.

Die Nebenwinkel eines ∠ sind Scheitelwinkel unter sich, folglich einander gleich, daher auch umgekehrt: Scheitelwinkel sind immer Nebenwinkel eines und ebendesselben ∠, daher einander gleich.

Verdoppelt man die letzte Zeichnungsart der Nebenwinkel, so erhält man folgende für die Scheitelwinkel: Wenn man beyde Schenkel eines Winkels durch den Scheitelpunkt verlängert, so entstehen 3 neue ∠, wovon die 2

anliegenden Nebenwinkel des gegebenen sind, und der 3te gegenüberstehende sein Scheitelwinkel ist.

4) Daß die daraus entstandene Linie, zwar nicht mit der Linie verbunden, aber doch eine solche Lage gegen sie hat; daß wenn man entweder

a) beyde Linien,

b) oder nur die gegebene,

c) oder die durch des Punktes Bewegung entstandene, hinlänglich verlängert, sowohl einfache ∠ als auch Neben- und Scheitelwinkel erhalten kann.

5) Daß er in seiner Bewegung immer die nämliche Entfernung von der gegebenen Linie beybehält, und sie folglich nie berührt, man mag seine Bewegung fortsetzen so lange man will.

Das dadurch entstandene nennt man gleichlaufende Linien.

Gleichlaufende Linien treffen also einander nie, man mag sie auf beyden Seiten verlängern, so lange man will, und haben immer gleiche Entfernung von einander.

Vergleichende Uebersicht des bisher dargestellten.

Zwey gerade Linien, welche nicht mit einander verbunden sind, können nur folgende Lagen zu einander haben:

1) Eine solche, daß sie hinlänglich verlängert eine Linie bilden.

2) Eine solche, daß sie hinlänglich verlängert Winkel bilden.

3) Eine solche, daß sie einander niemals berühren, man mag sie verlängern, so lang man will.

Zwey gerade Linien, welche mit einander verbunden sind, können unter sich eine solche Lage haben:

1) Daß sie nur eine Linie bilden.

2) Daß sie nur einen Winkel bilden.
3) Daß sie nur 2 ∠ bilden.
4) Daß sie nur 4 ∠ bilden.

Zwey gerade Linien können nicht so mit einander verbunden werden, daß sie

1) Einen Raum einschließen.
2) 2 spitze ∠ allein bilden.
3) 2 stumpfe ∠ allein bilden.
4) 3 ∠ bilden.
5) 4 spitze ∠ bilden.
6) 4 stumpfe Winkel bilden.
7) Mehr als 4 ∠ bilden.
8) Nur 2 Paar Nebenwinkel bilden.
9) Nur 3 Paar Nebenwinkel bilden.
10) Mehr als 4 Paar Nebenwinkel bilden.
11) Mehr oder weniger als 2 Paar Scheitelwinkel bilden.

Zwey gerade Linien können ohne Rücksicht auf Lage nur durch ihre Länge von einander unterschieden werden.

Diejenige ist die längere, deren Endpunkte weiter von einander entfernt sind, als die Endpunkte der andern.

Diejenige ist die kürzere, deren Endpunkte näher beyeinander liegen, als die der andern.

Die Größe eines Winkels hängt nicht von der Größe seiner Schenkel, sondern nur von der Oeffnung derselben ab.

Die Größe zweyer Winkel, oder vielmehr die Oeffnung ihrer Schenkel, kann durch eine von ihrem Scheitelpunkte in gleichen Entfernungen angestellte Messung bestimmt werden. Von 2 ∠ ist derjenige der kleinere, dessen Oeff-

nung, vom Scheitelpunkte aus in gleicher Entfernung gemessen, die größere ist.

Alle rechte ∠ sind gleich groß. Nicht alle spitze ∠ sind gleich groß. Nicht alle stumpfe ∠ sind gleich groß.

Der rechte ∠ kann also schicklich als Maaßstab für spitze und stumpfe ∠ angenommen werden, indem alsdann letztere, durch die Anzahl gleicher Theile, die sie vom rechten enthält, auch unter sich bestimmt sind.

Neben- und Scheitelwinkel haben **mit einander gemein:**

1) Daß ihr Daseyn das Daseyn zweyer Winkel fordert.

2) Daß sie gegenseitig einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt haben.

3) Daß bey beyden ein Schenkel, die Verlängerung eines Schenkels des andern Winkels ist.

4) Daß beyde durch die Verbindung zweyer geraden Linien gebildet werden.

Neben- und Scheitelwinkel **unterscheiden sich** dadurch:

1) Daß Nebenwinkel einen gemeinschaftlichen Schenkel haben.

a) Daß bey dem Scheitelwinkel die Winkel gegenseitige Verlängerung, und

2) Daß durch 2 Linien 1 oder 4 Paar Nebenwinkel gebildet werden können.

b) Daß durch 2 Linien immer nur 2 Paar Scheitelwinkel gebildet werdeu können.

3) Daß Nebenwinkel, ohne den Durchschnitt zweyer Linien gebildet werden können.

e) Daß Scheitelwinkel nur durch den Durchschnitt zweyer Linien gebildet werden können.*)

Von den geometrisch-wichtigen Produkten der Verbindung dreyer geraden Linien.

Wenn 2 gerade gleichlaufende Linien von einer dritten geraden durchschnitten werden, so entstehen 8 Winkel, wovon die 4, die ausserhalb der gleichlaufenden Linien liegen, äußere Winkel heißen, und diejenigen 4 Winkel, welche innerhalb der gleichlaufenden Linie liegen, innere Winkel genannt werden.

Diejenigen äußern Winkel, welche auf beyden Seiten

*) Es ist nicht schlechterdings nothwendig, daß der Lehrer alles vorspreche und vorzeichne: nein er soll und kann seine Zöglinge vieles, sehr vieles selbst finden lassen: nur muß er sie recht mit dem zu Findenden, das heißt mit der Aufgabe bekannt zu machen, und durch Einwürfe und Wendungen ihre Aufmerksamkeit zu erregen und in Thätigkeit zu erhalten verstehen.

Da von jedem Leser, der nur mit einiger Aufmerksamkeit das Vorhergehende durchlief, vorausgesetzt werden kann, daß er den Gang aufgefaßt habe, so wäre es überflüßig, alle Verbindungen von 3 Linien auf eine ähnliche Art durchzugehn. Es wird jedem Lehrer, wenn er mit seinem Zöglinge das Vorhergehende übte, leicht sein, den Gang, die Verbindung von 3 Linien zu untersuchen, von selbst zu finden: ich hebe daher von denselben nur diejenige heraus, welche zu neuen Wort- und Sachkenntnissen führen, d. h. die geometrisch-wichtigen. Zu gleicher Zeit bemerke ich, daß diese Erschöpfung der einzelnen Fälle nicht überall durchgeführt zu werden braucht, sondern nur bis zu einem gewissen Grad. Die Klassen der Aufgaben und Ansichten nicht aber die einzelnen Fälle selbst sind zu erschöpfen, sobald die Combinationskraft nur einiger Maaßen im Lernenden entwickelt ist.

der durchschneidenden Linie liegen, und nicht Nebenwinkel sind, heißen äußere Wechselwinkel. *)

---

*) Diese Figur ist gleich eine von denen, an der man die Zöglinge alles selbst finden lassen kann, und zwar auf mehrerley Art; z. B. um von ihnen die Erklärung der Wechselwinkel herauszulocken, kann man einmal auf folgende Art verfahren, man frage einen der Zöglinge, höre, wie willst du mit Worten, ohne von deinem Platze aufzustehen, mir genau die Lage angeben, von b dem Wechselwinkel von a, ohne ihn b zu nennen? oder anders gesagt, wie willst du mit Worten meine Hand zwingen, daß sie von allen übrigen 7 Winkeln gerade auf b deuten muß, wenn sie auf den Wechselwinkel von a nach diesen Worten deuten soll, und ihr also die Wahl der übrigen verboten ist? — Gesetzt, er antwortete: der Wechselwinkel von a liegt unterhalb a.

Lehrer. Also i, f, d od. h

Zögling. Keiner von diesen allen.

Lehrer. Wenn das ist, so mußt du mir sie zu wählen verbieten.

Zögling. Der Wechselwinkel von a ist weder i, f, d noch h.

Lehrer. Was sind i, h, d und f für Winkel?

Zögling. Ach! jetzt weiß ich es: der Wechselwinkel von a ist kein innerer, sondern ein äußerer Winkel.

Lehrer. Jetz habe ich nur noch unter den 3 Winkeln c, b und g die Wahl, um mir nun die von g zu verbieten, mußt du die Winkel b und g genau betrachten, und sehen, durch was sie sich wechselseitig von a unterscheiden.

Zögling. g und a liegen auf einer und ebenderselben Seite der durchschneidenden Linie und b u. a auf verschiedenen.

Lehrer. Setze also diese nähere Bestimmung zu Obigem.

Zögling. Der Wechselwinkel von a ist ein äußerer Winkel und liegt nicht auf derselben Seite der durchschneidenden Linie, auf der a liegt.

Lehrer. Nun habe ich nur noch die Wahl zwischen b und c:

Diejenigen innern, welche auf beyden Seiten der durchschneidenden Linie liegen, und nicht Nebenwinkel sind, heißen **innere Wechselwinkel**.

---

allein auch diese mußt du mir verbieten; suche also, durch was sich c und b in Rücksicht a außer Obigem unterscheiden.

Zögling. c ist Nebenwinkel von a, und b nicht, nun weiß ich es gewiß genau anzugeben, welches der Wechselwinkel von a ist. Nämlich derjenige äußere Winkel, der nicht mit ihm auf der nämlichen Seite der durchschneidenden Linie liegt und auch nicht sein Nebenwinkel ist.

Lehrer. Richtig; denn jetzt ist mir die Wahl von allen übrigen verboten.

So kann man auf ähnliche Art die Wechselwinkel von g, c und b, dann die von den innern Winkeln bestimmen lassen. — Wenn dies geschehen, so mache man sie aufmerksam, daß der Wechselwinkel eines äußern ebenfalls ein äußerer und der Wechselwinkel eines Innern ebenfalls ein innerer Winkel, folglich immer von gleicher Art ist; denn alsdann wird er die allgemeine Erklärung der Wechselwinkel gewiß richtig verstehen.

Auch kann man folgendermaßen verfahren.

Lehrer. Hier sind 8 Winkel, die wir nun näher betrachten wollen: zuerst laßt uns sehen, ob wir außer der Eintheilung derselben in innere und äußere Winkel auf neue uns bisher unbekannte Winkelarten kommen. Um dies zu thun, wollen wir irgend einen Winkel mit allen andern einzeln vergleichen: also was ist c für ein ∠, in Bezug auf a.

Zögling. c ist der Nebenwinkel von a.

Lehrer. Was ist f für ein Winkel in Bezug auf a?

Zögling. Des Winkels a Scheitelwinkel.

Lehrer. Was ist d für ein Winkel?

Zögling. d ist der 2te Nebenwinkel von a.

Lehrer. Was unterscheidet ihn von c?

Zögling. c ist äußerer und d ein innerer Winkel.

Lehrer. Der äußere Winkel a hat also einen äußern und einen innern Winkel zum Nebenwinkel und einen innern zum Schei-

Wechselwinkel sind also überhaupt 2 Winkel von gleicher Art, (d. h. entweder äußere oder innere Winkel) die auf

---

telwinkel. Mit dem unmittelbar mit a verbundenen Winkel wären wir nun fertig, und hätten hierbey keine neue Winkel bekommen: laßt uns also sehen, ob wir nicht durch die noch übrigen Winkel was erhalten. Was ist h für ein Winkel in Bezug auf a?

Zögling. h ist ein innerer Winkel der mit a auf der nämlichen Seite der durchschneidenden Linie liegt und nicht Nebenwinkel ist.

Lehrer. Richtig. Statt aber allemal das Ebengesagte zu wiederholen, so hat man diesem Winkel h, einen besondern Namen gegeben, nämlich Gegenwinkel, weil er dem Winkel a gegenüber liegt: hier hatten wir also schon eine neue Art von Winkel kennen lernen. Was ist i für ein Winkel in Bezug auf a?

Zögling. Ein innerer Winkel, der nicht auf derselben Seite der durchschneidenden Linie liegt, und nicht Scheitelwinkel von a ist; wie nennt man diesen Winkel i mit einem besondern Namen?

Lehrer. Der Winkel i hat in Bezug auf a keinen besondern Namen: weil sie und die gleiche Lage unter sich habende Winkel weniger zusammen betrachtet werden, als daß die Wiederholung dessen, was ihre Lage bestimmt, beschwerlich fallen sollte. Was ist g für ein Winkel in Bezug auf a?

Zögling. Ein äußerer Winkel, der auf derselben Seite der durchschneidenden Linie liegt auf der a liegt.

Lehrer. Auch dieser Winkel hat in Rücksicht auf a keinen besondern Namen, welche Lage hat endlich der Winkel b in Rücksicht auf a?

Zögling. Er ist ein äußerer Winkel, der nicht auf der nämlichen Seite der durchschneidenden Linie liegt auf der a liegt, und auch nicht sein Nebenwinkel ist.

verschiedener Seite der durchschneidenden Linien liegen, und nicht Nebenwinkel sind.

Stellt man sich die eine der gleichlaufenden Linien gleichlaufend mit sich selbst, gegen die andere bewegt vor, so ändert sie in dieser Bewegung niemals ihre Lage gegen die durchschneidende Linie, d. h. sie macht mit dieser immer gleiche Winkel. In dieser Bewegung nun, wenn sie hinlänglich fortgesetzt angenommen wird, muß sie in die Lage der andern gleichlaufende Linie kommen, und wird also auch dort die gleichen Winkel machen; folglich machen beyde gleichlaufende Linien mit der 3ten durchschneidenden Linie gleiche Winkel.

Auf eine andere Art dies bewiesen. Stellt man sich die durchschneidende Linie durch die Bewegung eines Punktes erzeugt vor, so nähert und entfernt sich der Punkt, da er immer gerade Richtung beybehält, den gleichlaufenden Linien unter den nämlichen Winkeln, daher sind die Winkel, die sie mit beyden machen, einzeln genommen einander gleich. Folglich sind

---

Lehrer. Dieser Winkel heißt der Wechselwinkel von a: weil dergleichen Winkel öfters zusammen betrachtet werden, so hat man ihm auch einen besondern Namen gegeben. Der ∠ a hat also von dem mittelbar mit ihm verbundenen Winkel

1) einen innern zum Gegenwinkel
2) einen äußern zum Wechselwinkel.

Auf ähnliche Art verfahrt man mit den übrigen, sowohl äußern als innern Winkeln. So trocken dieses Geschäft hier durch den todten Buchstaben dargestellt scheinen mag, so lebendig und bildend ist es durch das lebendige Wort. Ich habe daher auch den Zögling gerade so antworten lassen als hier steht, weil die kleinen Fehlerchen, die im Gespräche Leben und Thätigkeit hervorbringen, mir die Trockenheit zu vermehren schienen.

1) Immer 2 Winkel, wovon der eine ein innerer und der andere ein äußerer ist, die auf der nämlichen Seite der durchschneidenden Linie liegen, und nicht Nebenwinkel sind, d. h. Gegenwinkel, einander gleich.

2) Alle Wechselwinkel einander gleich, und

3) Jedes Paar äußere und innere Winkel, welche auf der nämlichen Seite der durchschneidenden Linie liegen, machen zwey rechte Winkel aus.

An dieser Figur sieht man.

1) Einfaches. Eine gerade Linie, die 2 durchschneidet.

2) Zweyfaches.

a) Zwey gleichlaufende Linien.
b) Zwey Durchschnittspunkte.
c) Zwey Paar äußere Wechselwinkel.
d) — — innere — —
e) — — äußere Nebenwinkel.
f) — — innere — —
g) An jeder Seite der durchschneidenden Linie zwey Paar Nebenwinkel, wovon der eine ein äußerer und der andere ein innerer Winkel ist.
h) An jeder Seite der durchschneidenden Linie zwey Paar Gegenwinkel.
i) An jeder Seite der durchschneidenden Linie 2 Paar Winkel, die weder Neben- noch Gegenwinkel sind, und wovon jedes zwey rechten Winkeln gleich ist.

3) Dreyfaches.
Drey gerade Linien.

4) Vierfaches.

a) Vier äußere und vier innere Winkel.

b) Vier Paar Nebenwinkel, wovon bey jedem der eine ein äußerer und der andere ein innerer Winkel ist.

c) Vier Paar Nebenwinkel, wovon bey jedem beyde entweder innere oder äußere Winkel sind.

d) Vier Paar Scheitelwinkel.

e) — — Gegenwinkel.

f) — — Wechselwinkel.

5) Sechsfaches.

6 Endpunkte.

6) Siebenfaches.

7 Theile der Linien.

7) Achtfaches.

a) Acht Winkel.

b) Acht Paar Nebenwinkel.*)

Wenn zwey gerade Linien auf den Endpunkten einer 3ten geraden Linie rechtwinklicht aufstehen, so schließen sie keinen Raum ein.

Wenn demnach zwey gerade Linien mit einer 3ten einen Raum einschließen, d. h. ein Dreyeck bilden sollen, so dürfen nicht beyde rechtwinklicht aufstehen, sondern es müßen entweder beyde, oder wenigstens die eine sich von der rechtwinklichten Lage ab- und der andern zuneigen.

Ein Dreyeck kann also keine zwey rechte, und noch vielweniger zwey stumpfe Winkel haben.

Neigen sich beyde um gleichviel von der rechtwinklichten

---

1) Auf ähnliche Art verfährt man bey den divergirenden und convergirenden Linien, welche von einer 3ten geraden Linie durchschnitten werden.

Lage ab und einander zu, so kommen sie sich halben Weges entgegen, machen daher

1) Mit der 3 geraden Linie, welche wir Grundlinie oder Basis nennen, gleiche Winkel, und zwar ist jeder gleich einem rechten, weniger dem Winkel, um den sich die Linien von der rechtwinklichten Lage abneigten.

2) Unter sich einen, der doppelt so groß ist als der Winkel, um den sich jede von der rechtwinklichten Lage abneigt; denn um eben den Winkel neigt sich jeder der andern zu.

3) Ist ihr Vereinigungspunkt oder der Scheitel dieses Winkels von den Endpunkten der Grundlinie gleichweit entfernt, und liegt rechtwinklicht über der Mitte derselben.

4) Theilt die diesen Vereinigungspunkt mit der Mitte der Grundlinie verbindende gerade Linie den der Grundlinie gegenüberliegenden Winkel in zwey gleiche Theile: denn sie macht mit jedem seiner Schenkel einen Winkel = dem Abweichungswinkel desselben von der rechtwinklichten Lage; nun sind nach der Annahme die Abweichungswinkel gleich, folglich auch diese ihre Wechselwinkel.

5) Dies dadurch entstandene Dreyeck hat also wenigstens zwey gleiche Seiten und zwey gleiche Winkel, und heißt deßwegen gleichschenklichtes Dreyeck.

Je größer die Abweichungswinkel sind, desto kleiner sind die Winkel an der Grundlinie, und desto größer der ihr gegenüberstehende Winkel. (Fig. A u. B)

Je kleiner die Abweichungswinkel sind, desto größer sind die ∠ an der Grundlinie, und desto kleiner der ihr

gegenüberstehende Winkel, den wir Winkel an der Spitze nennen wollen.

Je größer die Abweichungswinkel sind, in desto geringerer Entfernung von ihren Anfangspunkten und dem Mittelpunkte der Grundlinie begegnen sich die Linien, und in je geringerer Entfernung dies geschieht, desto kleiner werden diese Linien selbst seyn.

Je kleiner die Abweichungswinkel sind, in desto größerer Entfernung von ihren Anfangspunkten und dem Mittelpunkte der Grundlinie kommen die Linien zueinander, und in je größerer Entfernung dies geschieht, je größer werden die Linien selbst seyn.

Ist der Winkel, um den sich jede der zwey Linien von der rechtwinklichten Lage abneigt, gleich $\frac{1}{3}$ eines rechten, so bildet jede von ihnen mit der Grundlinie, und auch unter sich einen Winkel = $\frac{2}{3}$ eines rechten. — Die Winkel dieses sind also einander gleich. Da je 2 und 2 von den Seiten des Dreyecks auf der dritten unter gleichem Winkel aufstehen, so neigen sie sich alle um gleichviel zu einander, und sind daher einander gleich. Dies Dreyeck hat also auch drey gleiche Seiten.

Ein solches Dreyeck nennt man ein gleichseitiges Dreyeck.

Neigen sich die beyden Linien um mehr oder weniger als $\frac{1}{3}$ eines rechten Winkels von der rechtwinklichten Lage ab und einander zu, so machen sie im ersten Fall, mit der Grundlinie gleiche Winkel, wovon jeder kleiner ist als $\frac{2}{3}$ eines rechten und unter sich einen Winkel, der größer ist als $\frac{2}{3}$, und zwar um das Doppelte größer, um das jeder von den beyden übrigen kleiner ist als $\frac{2}{3}$ eines rechten Winkels; ferner begegnen sie sich an einem Punkte, der nicht so weit von den Endpunkten entfernt

liegt, als die Grundlinie selbst lang ist. Im zweyten Falle bilden sie mit der Grundlinie auch gleiche Winkel, wovon aber jeder größer ist, als $\frac{2}{3}$ eines rechten Winkels, und unter sich einen Winkel, der kleiner ist, als $\frac{2}{3}$ eines rechten, und zwar um das Doppelte kleiner, als jeder von den beyden übrigen größer ist, als $\frac{2}{3}$ eines rechten: ferner begegnen sie sich in einem Punkte, der weiter von den Endpunkten entfernt ist, als die Grundlinie lang ist. (Fig. A.)

In beyden Fällen ist also die Summe der ∠ gleich zwey rechten.

Wenn daher von einem gleichschenklichten Dreyecke bekannt ist, daß der Winkel, den die zwey gleichen Seiten mit einander machen

1) gleich ist $\frac{2}{3}$ eines rechten, so folgt, daß dieses gleichschenklichte Dreyeck drey gleiche Winkel, und drey gleiche Seiten habe, d. h. ein gleichseitiges sey;

2) größer ist als $\frac{2}{3}$ eines rechten, so folgt, daß dies ein gleichschenklichtes Dreyeck ist, das zwey gleiche Winkel hat, wovon jeder kleiner ist, als $\frac{2}{3}$ eines rechten, und zwar um die Hälfte dessen, was der durch die gleiche Seite gebildete Winkel größer ist, als $\frac{2}{3}$ eines rechten; ferner zwey gleiche Seiten habe, wovon jede kleiner ist als die Grundlinie;

3) kleiner ist als $\frac{2}{3}$ eines rechten Winkels, so folgt, daß dies ein gleichschenklichtes Dreyeck ist, das zwey gleiche Winkel hat, wovon jeder größer ist, als $\frac{2}{3}$ eines rechten, und zwar um die Hälfte dessen, was der durch die gleichen Seiten gebildete Winkel kleiner ist, als $\frac{2}{3}$ eines rechten: ferner zwey gleiche Seiten habe, wovon jede größer ist als die Grundlinie.*)

---

*) Auf ähnliche Art wird auf das Verhältniß der Winkel und

Weichen die zwey Linien jede um einen halben rechten Winkel von der rechtwinklichten Lage ab und einander zu, so bilden beyde mit der Grundlinie

1) gleiche Winkel, wovon jeder gleich ist einem halben rechten Winkel, und unter sich einen Winkel, der gleich ist zwey halben, also ein ganzer rechter Winkel.

2) Begegnen sie sich in einem Punkte, der von der Mitte der Grundlinie um die Hälfte der Grundlinie selbst entfernt ist; denn indem die ihn mit der Mitte der Grundlinie verbindende Linie den rechten Winkel halbirt, so theilt sie das ganze Dreyeck in zwey Dreyecke, die zwey gleiche Winkel haben, also gleichschenklichte sind, die gleichen Seiten dieser gleichschenklichten Dreyecke sind aber die zwey Hälften der Grundlinie, und die die Mitte derselben mit dem Scheitelpunkt des rechten Winkels verbindende Linie; folglich 2c.

Ein solches Dreyeck nennt man ein gleichschenklichtes rechtwinklichtes Dreyeck.

Weichen sie mehr, als um einen halben rechten Winkel ab; so bilden sie

---

Linien zu einander geschlossen, wenn man weiß, ob in einem gleichschenklichten Dreyecke

a) die Winkel von der Grundlinie

1) gleich
2) größer
3) kleiner als $\frac{2}{3}$ eines rechten sind.

b) Die gleichen Seiten einzeln genommen

1) gleich
2) größer
3) kleiner als die Grundlinien sind.

1) mit der Grundlinie zwar gleiche Winkel, wovon aber jeder kleiner, als ein halber rechter Winkel ist, und unter sich einen Winkel, der größer ist, als ein rechter, und zwar um das Doppelte des Winkels, um den sich jede von der rechtwinklichten Lage mehr, als einen halben rechten Winkel abneigt, d. h. sie bilden einen stumpfen Winkel.

2) Begegnen sie sich in einem Punkte, der um weniger, als die halbe Grundlinie von der Mitte derselben entfernt ist.

Ein solches Dreyeck nennt man ein gleichschenklicht stumpfwinklichtes Dreyeck.

Weichen sie weniger, als einen halben rechten Winkel, und zwar nicht gerade um $\frac{1}{3}$ rechten ab; so bilden sie

1) mit der Grundlinie zwar gleiche Winkel, aber jeder derselben ist größer, als ein halber rechter Winkel, und unter sich einen Winkel, der kleiner, als ein rechter, also ein spitzer ∠ ist, und zwar um das Doppelte des Winkels kleiner, um den sich jede der beyden Linien weniger von der rechtwinklichten Lage abneigt, als ein halber rechter Winkel.

2) Begegnen sie sich in einem Punkte, der um mehr, als die halbe Grundlinie von der Mitte derselben entfernt ist.

Solche Dreyecke nennt man gleichschenklichte spitzwinklichte Dreyecke.

Wenn demnach in einem gleichschenklichten Dreyecke bekannt ist, daß der Winkel, den die zwey gleichen Seiten mit einander machen,

1) ein spitzer Winkel ist; so folgt, (Fig. B.)

a) daß jeder der beyden übrigen Winkel größer ist,

als ein halber rechter; folglich die Summe derselben gleich der eines stumpfen Winkels;

b) daß sein Scheitel um mehr, als die halbe Grundlinie von der Grundlinie entfernt ist.

2) ein rechter ist; so folgt,

a) daß jeder der beyden übrigen gleich ist einem halben rechten Winkel; folglich zusammen einen rechten Winkel ausmachen;

b) daß sein Scheitel um die halbe Grundlinie von der Grundlinie entfernt ist.

3) ein stumpfer ist, so folgt,

a) daß jeder der beyden übrigen kleiner ist, als ein halber rechter Winkel; folglich ihre Summe kleiner, als ein ganzer rechter, d. h. irgend einem spitzigen Winkel gleich sind.

b) daß sein Scheitel um weniger, als die halbe Grundlinie von der Grundlinie entfernt ist. *)

Allgemeine Resultate.

Wenn in einem gleichschenklichten Dreyecke eines der vier folgenden Stücke, nämlich:

---

*) Auf ähnliche Art wird auf das Verhältniß der Winkel zu einander und der Höhe zur Grundlinie geschlossen, wenn man von einem gleichschenklichten Dreyeck weiß, daß

a) die Winkel an der Grundlinie

1) gleich,

2) größer,

3) kleiner, als ein halber rechter sind;

b) die Höhe

1) gleich,

2) größer, oder

3) kleiner, als die halbe Grundlinie ist.]

1) der ∠ an der Spitze,
2) die Winkel an der Grundlinie,
3) die gleichen Seiten, oder
4) die Höhe,

sich ändert; so ändern sich mit ihm die übrigen drey Stücke auch, und zwar nehmen die Winkel an der Grundlinie, die gleichen Seiten und die Höhe zugleich zu oder ab, der ∠ an der Spitze aber nimmt zu, wenn jene 3 Stücke abnehmen, und ab, wenn jene zunehmen.

Um die Aenderungen etwas genauer anzugeben, mußte zum Maaßstabe derselben etwas vom Dreyecke entlehnt werden, was unabhängig von den sich ändernden Stücken immer dasselbe blieb, und dies ist für diese Winkeländerung, die Summe der Winkel, und für die Seiten- und Höhen-Aenderungen die Grundlinie: doch konnte die Grundlinie nicht als solche zum Maaßstabe dienen, sondern nur in einem Verhältnisse, daher sie für die Seitenänderungen als Grundlinien eines gleichseitigen, und für die Höhenänderungen als Grundlinie eines rechtwinklichten gleichschenklichten Dreyecks betrachtet werden mußte.

Aus einem der obigen 4 Stücke kann man also schließen:

a) In Ansehung der Winkel,
   1) auf die Art,
   2) ob sie größer, kleiner, oder gleich $\frac{2}{3}$ oder $\frac{1}{2}$ rechten Winkel sind.

b) In Ansehung der Seiten, ob sie
   1) größer,
   2) kleiner oder
   3) gleich der Grundlinie sind.

c) In Ansehung der Höhe, ob sie
   1) größer,

2) kleiner,

3) gleich der halben Grundlinie ist.

Um wie viel aber 1) die Winkel größer oder kleiner, als $\frac{2}{3}$ oder $\frac{1}{2}$ rechter Winkel, 2) die Seiten größer oder kleiner, als die Grundlinie, und 3) die Höhe größer oder kleiner, als die halbe Grundlinie ist, wird an einem andern Orte gezeigt.

Neigen sich die beyden Linien um ungleiche Winkel von der rechtwinklichten Lage ab und einander zu, so kommen sie einander nicht halben Wegs entgegen, bilden daher

1) mit der Grundlinie ebenfalls ungleiche Winkel, und zwar diejenige den größern, die sich am wenigsten von der rechtwinklichten Lage abneigt, und diejenige den kleinern, die sich um den größern Winkel von der rechtwinklichten Lage abneigt.

2) Unter sich einen Winkel, der zwar gleich ist der Summe der zwey Winkel, um die die Linien sich von der rechtwinklichten Lage abneigten, dessen Scheitel aber ungleich weit von den Endpunkten der Grundlinie entfernt ist, und nicht rechtwinklicht über der Mitte derselben liegt.

Wenn also in einem Dreyecke der Scheitel eines Winkels rechtwinklicht über der Mitte der gegenüberstehenden Seite liegen soll, so müssen seine Schenkel gleich seyn, und umgekehrt.

Da diejenige Linie, die den größern Abweichungswinkel macht, offenbar der andern mehr sich nähert, als diese ihr, so folgt, daß sie auch die größere sey, und da sie ferner mit der Grundlinie den kleinern Winkel bildet, so steht sie dem größern Winkel an derselben gegenüber.

Die größere Seite steht also dem größern Winkel, und der größere Winkel der größern Seite gegenüber.

Unter sich können also die zwey Linien nicht gleich seyn. Ist keine von ihnen gleich der Grundlinie, so nennt man solche Dreyecke ungleichseitige Dreyecke, und zwar

wenn der Winkel, den die zwey Seiten mit einander machen, ein spitzer ist, ein ungleichseitiges spitzwinklichtes Dreyeck;

wenn der Winkel ein stumpfer ist, ein ungleichseitiges stumpfwinklichtes Dreyeck, und

wenn sie einen rechten Winkel bilden, ein ungleichseitiges rechtwinklichtes Dreyeck.

Ist eine der Seiten gleich der Grundlinie, so ist die andere größer oder kleiner.

Das dadurch entstandene gleichschenklichte Dreyeck hat immer drey spitze Winkel, ist also immer spitzwinklicht, denn es ist der Winkel, den die zwey gleichen Seiten (wovon die eine die Grundlinie ist) mit einander machen, ein spitzer Winkel durch die Annahme: daß diejenige Linie, welche die Grundlinie ist, eine von der rechtwinklichten Lage ab- und der ersten zuneigenden Richtung haben soll; folglich sind auch die zwey übrigen Winkel des Dreyecks spitze Winkel, also das Dreyeck spitzwinklicht.

Tabellarischer Ueberblick der Dreyecke und ihrer dargestellten Eigenschaften.

Es giebt also sechserley Dreyecke.

A. Dreyerley in Ansehung der Seiten.

B. Dreyerley in Ansehung der Winkel.

A. In Ansehung der Seiten.

1) Gleichseitige. Immer spitzwinklichte.

2) Gleichschenklichte.

a) Rechtwinklichte.

b) Spitzwinklichte.

c) Stumpfwinklichte.

3) Ungleichseitige.

a) Rechtwinklichte.

b) Spitzwinklichte.

c) Stumpfwinklichte.

B. In Ansehung der Winkel.

1) Rechtwinklichte.

a) Gleichschenklichte.

b) Ungleichseitige.

2) Spitzwinklichte.

a) Gleichseitige.

b) Gleichschenklichte.

c) Ungleichseitige.

3) Stumpfwinklichte.

a) Gleichschenklichte.

b) Ungleichseitige.

Die Seiten als Eintheilungsgrund der Dreyecke betrachtet, so erscheint die Art

1) der gleichseitigen Dreyecke als die ärmste, und zwar möglichst ärmste, indem sie keine Unterarten enthält;

2) der gleichschenklichten und ungleichseitigen um gleich viel reicher, und zwar um möglichst reicher, indem sie 3 Unterarten enthält.

Die Winkel als Eintheilungsgrund der Dreyecke betrachtet, so erscheint die Art

1) der spitzwinklichten Dreyecke als die reichste, und zwar möglichst reichste, indem sie 3 Unterarten enthält;

2) der recht- und stumpfwinklichten Dreyecke, aber um gleichviel, nämlich um eine Unterart ärmer.

Jedes Dreyeck hat drey Winkel und drey Seiten.

In jedem Dreyeck ist die Summe der Winkel gleich zwey rechten Winkeln.

In jedem Dreyeck ist die Summe von zwey Seiten größer, als die dritte.

In jedem Dreyeck steht die größere Seite dem größern Winkel, und umgekehrt, dem größern Winkel die größere Seite gegenüber. Hieraus folgt:

1) Jedes Dreyeck, das drey gleiche Seiten hat, hat auch drey gleiche Winkel, und umgekehrt.

2) Jedes Dreyeck, das zwey gleiche Seiten hat, hat auch zwey gleiche Winkel, und umgekehrt.

3) Jedes Dreyeck, das drey ungleiche Seiten hat, hat auch drey ungleiche Winkel, und umgekehrt.

Jedes Dreyeck hat wenigstens zwey spitze Winkel. Hieraus folgt:

1) In jedem rechtwinklichten Dreyecke sind die zwey spitzen Winkel = einem rechten Winkel.

2) In jedem stumpfwinklichten Dreyecke sind die zwey spitzen Winkel kleiner, als ein rechter.

3) In jedem spitzwinklichten Dreyecke sind immer zwey und zwey Winkel größer, als ein rechter.

In jedem Dreyecke hat der Scheitel des größern Winkels die geringere Entfernung von der gegenüberstehenden

Seite, und umgekehrt ist der Winkel, dessen Scheitel die geringere Entfernung von der gegenüberstehenden Seite hat, der größere. Hieraus folgt:

1) In jedem gleichseitigen Dreyecke haben die Scheitel der Winkel gleiche Entfernung von der ihnen gegenüberliegenden Seite.

2) In jedem gleichschenklichten Dreyecke haben nur die Scheitel der gleichen Winkel gleiche Entfernung von der ihnen gegenüberstehenden Seite, und der Scheitel des dritten Winkels hat

a) im rechtwinklicht-gleichschenklichten Dreyecke eine der halben Grundlinie gleiche Entfernung.

b) Im spitzwinklichten Dreyecke eine Entfernung, die größer ist als die halbe Grundlinie.

c) Im stumpfwinklichten Dreyecke eine Entfernung, die kleiner ist als die halbe Grundlinie.

3) In jedem ungleichseitigen Dreyecke haben die Scheitel der Winkel auch ungleiche Entfernung von der ihnen gegenüberstehenden Seite, und zwar desto verschiedener, je verschiedener die Winkel sind.

Als Fläche betrachtet ist:

I) Ein gleichseitiges Dreyeck eine ebene Fläche, die durch drey gerade, gleichwinklicht mit einander verbundene Linien begränzt ist.

II) Ein gleichschenklichtes Dreyeck eine ebene Fläche, die durch drey gerade Linien begränzt ist, wovon nur zwey einander gleich sind, und zwar

a) im gleichschenklicht-spitzwinklichten Dreyecke, einen spitzen,

b) im gleichschenklicht-rechtwinklichten Dreyecke, einen rechten, und

c) im gleichschenklicht-stumpfwinklichten Dreyecke einen stumpfen Winkel bilden.

III) Ein ungleichseitiges Dreyeck eine ebene Fläche, welche durch drey gerade ungleiche Linien begränzt ist, und zwar

a) im ungleichseitig-spitzwinklichten Dreyecke drey spitze Winkel.

b) Im ungleichseitig-rechtwinklichten Dreyecke, einen rechten und zwey spitze Winkel, und

c) im ungleichseitig-stumpfwinklichten Dreyecke, einen stumpfen und zwey spitze Winkel hat.

Von der Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreyecke.

Tab. II. (R bedeutet rechter Winkel.)

Fig. 1 u. 2. Wenn auf den Endpunkten von zwey geraden gleichen Linien zwey andere so aufstehen, daß sie um $\frac{1}{3}$ eines rechten Winkels von der rechtwinklichten Lage abweichen und einander sich zuneigen, so entstehen nach dem Vorhergehenden zwey gleichseitige Dreyecke, und zwar, wegen Gleichheit der ersten Linien, solche, die sich blos durch ihre Stelle von einander unterscheiden, d. h. die gleiche Form haben und gleich groß sind.

Fig. 3 u. 4. Sind die zwey ersten Linien ungleich angenommen, so entstehen zwar auch gleichseitige Dreyecke, allein das eine ist größer als das andere; folglich ausser der Stelle auch durch die Größe unterscheidbar.

Fig. 5 u. 6. Wenn auf den Endpunkten von zwey

geraden gleichen Linien zwey andere so aufstehen, daß sie um einen halben rechten Winkel von der rechtwinklichten Lage abweichen und sich zuneigen, so entstehen nach dem Vorhergehenden gleichschenklicht-rechtwinklichte Dreyecke, und zwar, wegen der Gleichheit der ersten Linien, solche, die sich nur durch ihre Stelle von einander unterscheiden, d. h. die gleiche Form haben und gleich groß sind.

Fig. 7 u. 8. Sind aber die zwey ersten Linien ungleich angenommen, so entstehen zwar auch gleichschenklicht-rechtwinklichte Dreyecke, allein das eine ist größer, das andere kleiner, d. h. sie sind ausser ihrer Stelle auch noch durch ihre Größe unterscheidbar.

Fig. 9 u. 10, 13 u. 14. Bey den ersten zwey ist der Abweichungswinkel kleiner, und bey den zwey letztern größer als ein halber Rechter.

Wenn auf dem Endpunkt von zwey geraden gleichen Linien zwey andere so aufstehen, daß sich jede um den gleichen Winkel von der rechtwinklichten Lage ab- und der andern zuneigt, so entstehen gleichschenklichte Dreyecke, und zwar, wegen der Gleichheit der ersten Linien, welche wir ihre Grundlinien nennen wollen, und weil die andern Seiten um gleichviel sich nähern, solche, die blos durch ihre Stelle von einander unterscheidbar sind.

Fig. 11 u. 12, 15 u. 16. Bey welchen beyden Paar die vorige Bemerkung gilt.

Sind die zwey ersten Linien (Grundlinien) ungleich angenommen, so entstehen zwar auch gleichschenklichte Dreyecke, welche aber, ausser ihrer Stelle, noch durch ihre Größe unterscheidbar sind.

Die Seitenlinien neigen sich zwar in beyden Dreyecken

um gleichviel einander zu, allein wegen der Annahme der Grundlinien als ungleich, kommen sie da, wo die kleinere Grundlinie ist, früher zusammen, als da, wo ihre anfängliche Entfernung grösser, d. h. wo die grössere Grundlinie ist.

Fig. 17. u. 18. Wenn auf den Endpunkten von zweyen geraden gleichen Linien zwey andere so aufstehen, daß sie sich um ungleiche Winkel von der rechtwinklichten Lage ab- und einander zuneigen, so daß jedoch in jedem Dreyecke die gleiche Verschiedenheit statt findet, so entstehen zwey ungleichseitige Dreyecke; weil die Linien sich ungleich schnell einander nähern, die aber doch blos durch ihre Stelle von einander unterschieden werden können, denn in beyden neigen sich wegen dergleichen Verschiedenheit der Abweichungswinkel gleich verschieden die Linien zu einander.

Fig. 19 u. 20. Sind die zwey Linien ungleich angenommen, so entstehen aus ähnlichen Gründen Dreyecke, die ausser ihrer Stelle auch durch ihre Größe unterscheidbar sind.

Dreyecke, die gleiche Form und gleiche Größe haben, nennt man schlechthin gleiche Dreyecke.

Dreyecke, welche gleiche Form haben und ungleich groß sind, nennt man ähnliche Dreyecke.

Untersuchen wir diese Construktionen etwas genauer, so finden wir, daß wir in denjenigen Dreyecken, die gleiche Form hatten, und gleich groß waren, eine Seite und die zwey anliegenden Winkel einzeln genommen als gleich voraussetzten, und die übrigen drey Stücke, zwey Seiten und einen Winkel als Folgen der erstern Gleichsetzung ebenfalls gegenseitig gleich fanden.

Da aber in jedem Dreyecke drey Winkel und drey Seiten,

also zusammen genommen sechs Data sind, und wir in gegenwärtigen Construktionen für die völlig gleichen Dreyecke drey Data annahmen, so müssen wir nur sehen, ob das obengefundene Resultat Gleichheit der Form und der Größe, bey Annahme von andern drey Daten als die vorigen ebenfalls statt hat.

Hier gibt's folgende Combinationen.

1) Eine Seite und die zwey anliegenden Winkel. *)

2) Zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel.

3) Drey Seiten. **)

No. 1. war der angenommene Fall, also hätten wir noch die zwey übrigen zu untersuchen.

Ad. 2. so sind die Data gleich einem gegebenen Winkel nebst der Größe seiner Schenkel, folglich ist auch nothwendig die dritte Seite in beyden Dreyecken gleich, indem die zwey Endpunkte der Schenkel des Winkels, wegen dergleichen Größe und Richtung derselben in beyden gleichweit entfernt sind; ferner muß jeder der dadurch entstandenen Winkel in beyden gleich seyn, weil die Verschiedenheit blos von der Verschiedenheit der Größe und Lage der Schenkel herrühren könnte, diese sind aber in beyden gegenseitig gleich, folglich müssen auch die Winkel gleich seyn.

Ad. 3. So ist durch die Annahme einer Linie die Lage von zwey Punkten des Dreyecks bestimmt. Die Lage des drit-

*) Anmerk. Wenn zwey Winkel gegeben, so ist's auch der dritte, deßwegen ist der Fall, eine Seite und zwey Winkel nicht angeführt. Der angeführte aber aus der Construction hergeleitet.

**) Anmerk. Wenn zwey Winkel gegeben sind, so ist's auch der dritte, als Folgerung von selbst, deßwegen wäre das Geben von drey Winkeln nicht das Geben von drey Daten.

ten ist nun durch die zwey andern Seiten, welche nichts anders als seine Entfernung zu ihnen sind, ebenfalls bestimmt, indem es nur einen Ort geben kann auf einer Ebene, der zu zwey andern eine gegebene Entfernung hat, und auf einer Seite der Verbindungslinie liegt. Es müssen demnach auch die drey Winkel, die durch die Verbindung der drey Punkte entstehen, nur einerley seyn können. *)

Conclusion.

Es wäre folglich durch die Angabe von den drey obenbenannten Data als gleiche, die übrigen in allen drey Fällen ebenfalls gleich erwiesen. **)

Diese Sätze heißen Sätze der Gleichheit. Sie sind folgende:

1) Wenn in einem Dreyecke eine Seite und zwey Winkel einzeln genommen einer Seite und zwey Winkeln einzeln genommen in einem andern Dreyecke gleich sind, so sind die beyden Dreyecke einander gleich.

2) Wenn in einem Dreyecke zwey Seiten einzeln genommen nebst dem eingeschlossenen Winkel zweyen Seiten, einzeln genommen, nebst dem eingeschlossenen Winkel in einem andern Dreyecke gleich sind, so sind die beyden Dreyecke einander gleich.

---

*) Anmerk. Daß die Lage des dritten Punkts zweyerley seyn kann, nämlich: über und unter, oder rechts und links der ersten Linie, wenn man auf die Lage der Linie gegen den Beschauer Rücksicht nimmt, versteht sich von selbst.

**) Anmerk. Der Lehrer zeige im Vortrage die Unbestimmtheit des Falls, wenn zwey Seiten und ein anliegender Winkel gegeben sind. Hier konnte er in der Tabelle keine schickliche Stelle finden, ohne ihren Inhalt und ihre Form zu ändern.

3) Wenn alle drey Seiten einzeln genommen in einem Dreyeck allen drey Seiten, einzeln genommen, in einem andern Dreyeck gleich sind, so sind die beyden Dreyecke einander gleich *)

Bey der Construktion der ähnlichen Dreyecke waren wegen der Ungleichheit der Linien blos zwey Winkel als gleich angenommen, folglich der dritte als Folge von selbst. Die Winkelgleichheit muß demnach ein Erforderniß der Aehnlichkeit seyn. Da aber die Dreyecke blos durch ihre Größe unterscheidbar sind, so muß das Verhältniß der Seiten in beyden gleich seyn; indem sonst gegen die Annahme Formungleichheit statt fände. Folglich ändern sich die drey Sätze der Gleichheit für die Aehnlichkeit in folgende:

1) Wenn in zwey Dreyecken die Winkel einzeln genommen gegenseitig gleich sind, so sind die Dreyecke einander ähnlich.

2) Wenn zwey Seiten in einem Dreyeck das nämliche Verhältniß haben, wie zwey Seiten in einem andern Dreyeck und der eingeschlossene Winkel in beyden gleich ist, so sind die beyden Dreyecke einander ähnlich.

3) Wenn je zwey und zwey Seiten in einem Dreyeck das nämliche Verhältniß haben, wie je zwey und zwey Seiten in einem andern Dreyeck, so sind die Dreyecke einander ähnlich.

Da in Dreyecken, die einander gleich sind, die Höhen ebenfalls einander gleich seyn müssen, so wie die Winkel,

---

*) Anmerk. Ist die Lehre von der Congruenz der Dreyecke auf obenangezeigte Art vorgetragen, so kann der Lehrer sie auch durch die bekannte Methode des Deckens beweisen.

die sie mit den Seiten machen, und die Abschnitte, die sie mit der Grundlinie bilden, so folgt, daß man auch aus dieser Gleichheit die Seiten- und Winkelgleichheit beweisen kann.

Aus ähnlichen Gründen muß bey ähnlichen Dreyecken das Verhältniß der Höhen zu den Abschnitten, die sie an der Grundlinie bilden, dasselbe seyn, so wie auch die Winkel, die die Höhenlinie mit den Seiten macht, gleich seyn müssen.

Bey gleichen Dreyecken müssen vermög der Grundsätze: „Gleiches zu Gleichem addirt, giebt gleiche Summen; Gleiches von Gleichem abgezogen, bleiben gleiche Reste," auch die Summen und Differenzen der gleiche Lage habenden Linien gleich seyn.

Bey den ähnlichen Dreyecken hingegen müssen diese Summen und Differenzen gleiches Verhältniß haben.

Folgerung.

Man muß also aus drey Daten ein Dreyeck zeichnen können, und zwar, wenn es Daten sind, die die Gleichheit zur Folge haben, gleiche Dreyecke, und wenn es Daten sind, die die Aehnlichkeit zur Folge haben, ähnliche Dreyecke.

Aufgaben zur Anwendung der Sätze der Gleichheit der Dreyecke.

Forderungen.

1) Man muß eine gerade Linie ziehen.

2) Einen Kreis oder Cirkel beschreiben können.

Historische Anmerkung.

Um diesen beyden Forderungen mit mehr Sicherheit und Schnelligkeit, als es durch die bloße Hand geschehen könnte, Genüge leisten zu können, hat man schon lange die zwey hinlänglich bekannten Instrumente, Lineal und Zirkel erfunden. Das Erste stellt eine gerade steife überall anbringbare Linie, das Zweyte gleichsam einen Kreis von jedem Halbmesser vor. Die Aufgaben wollen wir nun nach der Folge der Construktion, die uns die Eigenschaften der bisher gehabten räumlichen Verhältnisse kennen lehrte, ordnen. Also zuerst:

a) Winkelverzeichnung; dann
b) Parallellinienziehung,
c) die Dreyeckverzeichnung, und
d) Linientheilung.

A.

Erste Aufgabe.

Tab. 2. Fig. 1. (der mit a bezeichnete Punkt ist der gegebene.

Aus der Mitte einer gegebenen geraden Linie eine rechtwinklichte Linie zu errichten.

Ansicht.

Da hier blos die Richtung einer geraden Linie gegen eine andere verlangt wird, und die Richtung einer geraden Linie durch zwey Punkte bestimmt, ferner hier einer davon gegeben ist, nämlich der Mittelpunkt der gegebenen Linie, so reducirt sich die ganze Aufgabe auf das Finden eines Punkts, der rechtwinklicht über dem Mittelpunkt der gegebenen Linie liegt. Hiezu wissen wir aus dem Vorhergehenden, daß die Spitze eines gleich-

schenklichten Dreyecks rechtwinklicht über dem Mittelpunkt der Grundlinie liegt. Können wir folglich einen Punkt verzeichnen, der als Spitze eines gleichschenklichten Dreyecks bewiesen werden kann, wovon die Grundlinie die gegebene Linie ist, so hat er die verlangte Eigenschaft und die Linie von dem Mittelpunkt nach ihm ist die Gesuchte.

Praktische Auflösung.

1) Mit einer Eröffnung des Zirkels, größer als die Hälfte der Linie, beschreibe man aus dem einen Endpunkt einen Kreisbogen.

2) Setze alsdann in dem andern Endpunkt der Linie ein, und durchkreutze diesen Bogen durch einen andern von gleichem Halbmesser.

3) Ziehe alsdann eine gerade Linie von dem Mittelpunkt der gegebenen Linie, durch den Durchschnittspunkt der Kreisbögen, so ist diese die Verlangte aus leicht einzusehenden Gründen.

Zweyte Aufgabe.

Fig. 2. Aus einem gegebenen Punkt einer geraden Linie, der nicht in der Mitte derselben liegt, eine rechtwinklichte Linie zu errichten.

Ansicht.

Läge der Punkt in der Mitte, so wäre die Auflösung die vorige, oder könnte ich den Punkt, als in der Mitte eines Theils der gegebenen Linie liegend betrachten, so wäre dann dieser Theil die Linie, aus deren Mittelpunkt eine rechtwinklichte Linie errichtet werden kann, und die Auflösung wäre reducirt auf die Vorhergehende.

Praktische Auflösung.

Man schneide mit einer beliebigen Eröffnung des Zirkels von dem gegebenen Punkt aus, auf beyden Seiten gleich viel, von der gegebenen Linie ab, und verfahre in Beziehung auf diesen abgeschnittenen Theil der gegebenen Linie wie bey No. 1.

Dritte Aufgabe.

Am Ende einer gegebenen geraden Linie eine rechtwinklichte Linie zu errichten.

Allgemeine Ansicht.

Hier giebts zwey Fälle: entweder läßt sich die Linie durch den angegebenen Endpunkt verlängern, oder nicht.

Läßt sich dieselbe verlängern, so reducirt sich diese Aufgabe durch die Verlängeung auf Aufgabe 2, und hat folglich mit ihr gleiche Auflösung.

Fig. 3. Läßt sie sich nicht verlängern, so müssen wir, da sie auf keinen der vorigen Fälle reducirbar ist, auf andere Mittel denken. Könnten wir von dem gegebenen Endpunkt aus eine Linie ziehen, die mit der erstern einen Winkel gleich $\frac{2}{3}$ eines rechten macht, und an diese zweyte einen Winkel von dem nämlichen Punkt aus anlegen gleich $\frac{1}{3}$ eines rechten, so würde diese dritte Linie mit der erstern einen Winkel machen gleich $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ gleich dem ganzen rechten, folglich würde diese dritte Linie gleich der Verlangten seyn. Um nun zu erfahren, ob solche Linien construirbar sind, so müssen wir sie einmal so gezeichnet annehmen und sehen, ob diese Annahme uns auf Schlüsse leitet, die uns Mittel an die Hand geben zur Auflösung.

Leitet uns die Annahme der vorhin genannten zwey Linien zu gar keinem Schluß, wie es hier wirklich der Fall ist, so müssen wir hier eine neue Hülfslinie nehmen, und zwar eine solche, die zu irgend einem Punkt der gegebenen oder angenommenen Linien irgend ein bekanntes Verhältniß hat; denn die willkührliche Annahme dieser Hülfslinie würde uns zu keinen Schlüssen leiten, die vom Bekannten ausgiengen, was doch schlechterdings seyn muß.

Fig. 4. Denken wir uns nach dieser Voraussetzung von irgend einem Punkt f der als rechtwinklicht angenommenen Linie a c nach der gegebenen a b eine solche Linie gezogen, die die mittlere Linie a d (diejenige die $\frac{2}{3}$ mit der gegebenen macht) so schneidet, daß der Durchschnittspunkt m vom Mittelpunkt n, der durch die Annahme des Anfangspunkts f der dritten Hülfslinie f p und durch den Endpunkt a der gegebenen Linie, begränzten rechtwinklicht angenommenen Linie a c rechtwinklicht entfernt ist, so haben wir zwey Dreyecke, wovon das Eine (dessen eine Seite die rechtwinklicht angenommene Linie ist) ein gleichschenklichtes ist; die gleichen Winkel in demselben sind einzeln genommen gleich $\frac{1}{3}$ R. also der dritte Winkel $\frac{4}{3}$, der Nebenwinkel desselben nämlich $\angle$ p m a hat folglich $\frac{2}{3}$.

Da nun nach der Annahme das zweyte Dreyeck noch einen Winkel gleich $\frac{2}{3}$ eines rechten enthält, nämlich $\angle$ m a p, so muß in demselben der dritte Winkel auch $\frac{2}{3}$ eines rechten seyn.

Das zweyte Dreyeck wäre demnach ein Gleichseitiges. Die beyden Dreyecke haben also mit einander gemein: daß die gleichen Seiten des erstern einzeln genommen, gleich sind den gleichen Seiten des zweyten einzeln genommen,

Können wir ebengenannte Folgerung aus der Annahme der gesuchten Linien construiren, so muß, da die Folgerungen wahr sind, auch der Rückschluß wahr seyn, d. h. die daraus construirten Linien die gesuchte Lage haben. Hieraus ergiebt sich folgende

Praktische Auflösung.

Fig. 5. 1) Mit einer beliebigen Eröffnung des Zirkels beschreibe man aus dem Endpunkt der gegebenen Linien als Centrum einen Kreisbogen, der auf der Linie aufsteht.

2) Von dem Berührungspunkt des Kreisbogens und der gegebenen Linie beschreibe man mit der gleichen Eröffnung des Zirkels einen Kreisbogen, der den erstern schneidet.

3) Von dem Berührungspunkt des Kreisbogens und der Linie, ziehe man durch den Durchschnittspunkt der beyden Bögen eine gerade Linie.

4) Mache ihre Verlängerung vom Durchschnittspunkt aus gleich der Entfernung des Durchschnittspunkts vom Berührungspunkt.

5) Vom Endpunkt dieser Verlängerung nach dem Endpunkt der gegebenen Linie, ziehe man eine gerade Linie, so entspricht sie der Aufgabe.

Vierte Aufgabe.

Aus einem gegebenen Punkte ausserhalb einer gegebenen geraden Linie eine rechtwinklichte zu fällen.

Ansicht der Aufgabe.

Fig. 6. Zu den gegebenen Punkten a muß noch ein anderer gesucht werden, der ebenfalls in der zu suchenden recht-

winklichten Linie liegt. Hiezu weiß ich, daß die Spitzen der gleichschenklichten Dreyecke, die auf gleichen Grundlinien stehen, in Beziehung auf ihre Grundlinie, diese Eigenschaft haben. Sehe ich demnach den gegebenen Punkt als Spitze eines gleichschenklichten Dreyecks an, dessen Grundlinie in der gegebenen Linie liegt, und construire zu dieser nämlichen Basis die Spitze eines andern gleichschenklichten Dreyecks, so hätte ich durch diesen den gesuchten nothwendigen Punkt und die durch beyde Punkte gezogene gerade Linie würde der Aufgabe entsprechen.

Hieraus ergiebt sich folgende

Praktische Auflösung.

1) Von dem gegebenen Punkt aus, als Centrum, beschreibe man einen Kreisbogen, der die gegebene Linie zweymal schneidet. Der abgeschnittene Theil der Linie ist die Grundlinie der obenerwähnten gleichschenklichten Dreyecke.

2) Von jedem der Durchschnittspunkte mit einer Eröffnung des Zirkels größer als die Hälfte ihrer Entfernung, mache man gleiche Bögen, jedoch bey jedem der Gleichen, so daß sie sich durchschneiden. Ihr Durchschnittspunkt ist die Spitze des zweyten gleichschenklichten Dreyecks. *)

3) Von dem gegebenen Punkt durch den Durchschnittspunkt der Kreisbögen nach der gegebenen Linie eine gerade Linie, so entspricht diese der Aufgabe.

---

*) Anmerk. Man sieht von selbst ein, daß die Spitze auf einer oder auf verschiedener Seite des als Grundlinie abgeschnittenen Theils liegen kann.

Fünfte Aufgabe.

Einen Winkel auf eine gegebene Linie zu zeichnen, der einem gegebenen gleich sey.

Ansicht der Aufgabe.

Fig. 9. u. 10. Diese Aufgabe hat mit No. 1 u. 2. das gemein, daß eine Linie von bestimmter Richtung gegen eine gegebene gesucht werden soll, unterscheidet sich aber durch ihre Allgemeinheit, indem bey den vorigen die Richtung immer rechtwinklicht war, hier aber rechtwinklicht und schiefwinklicht seyn kann, je nachdem die Schenkel des gegebenen Winkels rechtwinklicht oder schiefwinklicht mit einander verbunden sind. Es kommt hier also wieder darauf an, die Lage eines einzigen Punktes zu bestimmen, und zwar hier eines solchen, der verbunden mit einem Punkt der gegebenen Linien mit derselben einen Winkel bildet, gleich dem gegebenen. Wegen der größern Allgemeinheit der Aufgabe aber bedarf man auch allgemeinerer Mittel. Denn da der Winkel nicht bestimmt ist als Größe, wie bey den vorigen der Rechte, so muß ich zur Auflösung nicht aus der Annahme derselben, sondern aus dem räumlich gegebenen Winkel selbst die Mittel suchen. Dies kann ich auf folgende Art: vom Scheitelpunkt des Winkels, um vom Bekannten auszugehen, befinden sich in jedem Schenkelpunkte (die, was ihre Entfernung vom Scheitelpunkte betrift, ihre Gleichen im andern Schenkel haben,) (d. h. mit andern Worten: ein jeder Punkt in einem Schenkel ist vom Scheitelpunkt ungleich entfernt, aber jeder Punkt des einen Schenkels hat einen correspondirenden im andern Schenkel, der eben so weit vom Scheitelpunkt entfernt ist,) und diesen Punkt kann ich durch einen Kreisbogen zwischen den Schenkeln

gezogen finden. Da nun der zu zeichnende Winkel gleich seyn soll dem gegebenen, so müssen erstens zwey von den obenerwähnten correspondirenden Punkten seiner Schenkel eben so weit vom Scheitelpunkte entfernt seyn, als die correspondirenden im gegebenen Winkel; ferner müssen diese Punkte in beyden gleichweit entfernt seyn, dies führt zu folgender

Praktischen Auflösung.

1) Mit einer beliebigen Eröffnung des Zirkels beschreibe man vom Scheitelpunkt als Mittelpunkt zwischen die Schenkel des Winkels einen Kreisbogen, der die beyden Schenkel berührt.

2) Mit der nämlichen Eröffnung des Zirkels beschreibe man von demjenigen Punkte a der gegebenen Linie, der der Scheitelpunkt seyn soll, einen Kreisbogen, der auf der Linie aufsteht. Der Berührungspunkt ist einer der correspondirenden Punkte, und der andere liegt im Kreisbogen.

3) Man messe die Entfernung der Berührungspunkte des Kreisbogens und der Schenkel des gegebenen Winkels.

4) Mit dieser Eröffnung des Zirkels beschreibe man vom Berührungspunkt No. 2. aus, als Centrum einen Kreisbogen, der den in No. 2 gezogenen scheidet.

5) Durch diesen Durchschnittspunkt vom Punkte a der gegebenen Linie, der als Mittelpunkt des ersten Kreisbogens angenommen wurde, eine gerade Linie, so macht diese mit der gegebenen den verlangten Winkel; denn durch den Durchschnitt des erstens Kreisbogens wurde das wo (der Ort) des zweyten correspondirenden Punkts angegeben. *)

*) Anmerk. Der Lehrer kann dann auch den Beweis durch die Dreyeckgleichheit geben.

B.

Sechste Aufgabe.

Eine Linie zu zeichnen, die zu einer andern die halbe Neigung hat wie zwey andere gegebene Linien, oder mit andern Worten, einen gegebenen Winkel zu halbiren. —

In Fig. 9 ist die Auflösung angedeutet, die jedem aufmerksamen Leser von selbst einleuchtend seyn wird, und daher dem eignen Nachdenken desselben überlassen bleibt.

Durch einen gegebenen Punkt a mit einer geraden Linie eine gleichlaufende zu zeichnen.

Ansicht der Aufgabe.

Fig. 11. Weil die Richtung einer geraden Linie durch die Lage zweyer Punkte bestimmt ist, so kommt es wieder darauf an, ausser dem gegebenen einen andern Punkt zu finden, von dem man weiß, daß er in der gleichlaufenden Linie liegen muß. Parallellinien sind überall gleichweit entfernt. Ihre Entfernungen aber sind die rechtwinklichten Linien zwischen ihnen. Hieraus ergiebt sich folgende

Praktische Auflösung.

1) Von dem gegebenen Punkt aus fälle man nach der vierten Aufgabe eine rechtwinklichte Linie auf die gegebene.

2) Aus irgend einem beliebigen Punkt der gegebenen Linie errichte man nach der zweyten oder dritten Aufgabe eine rechtwinklichte, gleich der ersten, nach der nämlichen Seite.

3) Durch die Endpunkte der zwey rechtwinklichten Linien eine gerade Linie, so ist diese die gesuchte.

Da diese Auflösung zu langwierig, obgleich unmittel-

bar aus der Natur der gleichlaufenden Linien geschöpft ist, so hat man noch andere aus den Eigenschaften der innern und äußern Wechselswinkel und der Gegenwinkel hergeleitet, deren Beweis aus der bloßen Angabe der Verfahrungsart folgt, deßwegen blos die Auflösungen hier angegeben werden.

a) Durch innere Wechselswinkel.

1) Von dem gegebenen Punkt bis an die gegebene Linie eine gerade Linie;

2) nach der fünften Aufgabe einen Winkel (den gegebenen Punkt als Scheitelpunkt betrachtend) angelegt gleich einem der Winkel, den die gezogene Linie mit der gegebenen macht, und der nach der Natur der Wechselswinkel auf der andern Seite aufgetragen werden muß; so hat der Schenkel dieses Winkels eine parallele Lage, folglich entspricht er, nebst seiner Verlängerung durch den Punkt der Aufgabe. Fig. 12.

b) Durch äußere Wechselswinkel.

Fig. 13. 1) Durch den gegebenen Punkt und durch die gegebene Linie ziehe man unter einem beliebigen bequemen Winkel eine gerade Linie.

2) Trage nach der fünften Aufgabe einen der Winkel, den die durchschneidende Linie mit der gegebenen auf der, der Lage des gegebenen Punkts, entgegengesetzten Seite der Linie macht, nach der Natur der Wechselswinkel auf der andern Seite der durchschneidenden Linie liegend, an dieselbe, so ist der Schenkel dieses Winkels und seine Verlängerung durch den Punkt gleichlaufend, folglich der Aufgabe entsprechend.

c) Durch Gegenwinkel.

Fig. 14. 1) Von dem gegebenen Punkt durch die gegebene Linie eine gerade Linie.

2) Einen der Winkel, den sie mit der gegebenen Linie macht, z. B. nach der Natur der Gegenwinkel, auf der nämlichen Seite der durchschneidenden Linie liegend, an den Punkt a getragen, so ist der Schenkel und seine Verlängerung gleichlaufend und der Aufgabe entsprechend.

Historische Anmerkung.

Da so wohl die rechtwinklichte als auch die gleichlaufende Lage immer dieselbe ist, und man ihre Construktion häufig nöthig hat; ferner ihre Auflösungen vermittelst Zirkel und Lineal Zeit erfordernd sind, so hat man schon lange das bekannte Instrument Winkelmaas erfunden, mit dem man obige Aufgaben schneller auflöst. *) Jedoch zur Auftragung eines schiefen Winkels, weil dieser keine bleibende Größe hat, muß man größtentheils sich der angeführten Auflösung bedienen. Indessen hat man auch hiezu ein Mittel, den Transporteur erfunden, der sich auf die in der Aufgabe No. 5 angeführten Gründe stützt: allein sobald Genauigkeit erfordert wird, ist sein Gebrauch unzuverlässig. Ist die Größe eines Winkels aber in Grade angegeben, so bedarf man seiner. Weiter unten werden

*) Anmerk. Der Gebrauch wird besser mündlich gezeigt, und Fig. 7 u. 8, 15 u. 16 soll mehr auf die Stellung dieser Instrumente im System überhaupt, aufmerksam machen, worauf bisher so wenig Bedacht genommen, und doch so bildend ist, vermög des pädagogischen Grundsatzes, daß das Bedürfniß eines Kunstmittels vorhergehen müsse der Kenntniß und Gebrauch desselben.

wir ein Instrument kennen lernen, das sicherer zum Zweck führt: da aber die Gründe seiner Construktion jetzt noch nicht angeführt werden können, so wird auch hier nur auf ihn gedeutet.

Soll zu einer Linie eine gleichlaufende Linie in gegebener Entferuung gezogen werden, so kann man auch diese Aufgabe mit Instrumenten schneller lösen, indem man nur aus irgend einem Punkt der gegebenen Linie eine rechtwinklichte Linie zu errichten hat, gleich der gegebenen Entfernung, um durch den Endpunkt derselben eine gleichlaufende Linie zu ziehen.

Dædalus aus Griechenland im J. 1285 vor Christi Zeitrechnung, soll der Erfinder des Winkelmaaßes und des Bleylothes gewesen seyn. Siehe Pythagoras und Hypatia von Lüders.

C.

Verzeichnung gleicher Dreyecke. Tab. IV.

Erste Aufgabe.

Fig. I. Aus einer Seite und zwey anliegenden Winkeln ein Dreyeck zu zeichnen.

Auflösung.

1) Man ziehe eine gerade Linie gleich der gegebenen Seite, so giebt dieselbe schon zwey Punkte des zu suchenden Dreyecks.

2) An den einen Endpunkt trage man einen Winkel gleich einem der gegebenen, so liegt der dritte Punkt in dieser Linie, weil der gegebene Winkel nichts anders anzeigt, als die Richtung derjenigen Linie,

die von dem dritten Punkte nach einem der andern gezogen wird.

3) An dem andern Ende trage man nach der nämlichen Seite hin einen Winkel gleich dem dritten gegebenen, so muß der dritte Punkt des Dreyecks aus ähnlichen Gründen auch in dieser Linie liegen, folglich dort seyn, wo beyde Linien zusammen kommen.

Zweyte Aufgabe.

Fig. II. Aus zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel ein Dreyeck zu zeichren:

Auflösung.

1) Man ziehe eine gerade Linie gleich einer der gegebenen Seite.

2) An einen Endpunkt tage man einen Winkel gleich dem gegebenen.

3) Mache dessen Schenkel gleich der zweyten gegebenen Seite.

4) Vereinige die Endpunte, so ist allen Forderungen der Aufgabe ein Genüg geleistet, folglich das Dreyeck das verlangte.

Dritte Aufgabe.

Fig. III. Aus drey Seiten eines Dreyecks ein Dreyeck zu zeichnen.

Auflösung.

1) Man ziehe eine gerade Linie gleich einer der gegebenen.

2) Beschreibe von einen Endpunkte aus einen Kreis,

dessen Halbmesser gleich einer der übrigen gegebenen Linien ist, so muß der dritte Punkt in dieser Kreislinie liegen, weil jede der gegebenen Linien nichts, als die Entfernung der Punkte ist, und alle Punkte der Kreislinie vom Mittelpunkte gleich weit entfernt sind.

3) Von dem andern Endpunkte aus beschreibe man einen Kreis, dessen Halbmesser gleich ist der dritten gegebenen Linie, so muß aus ähnlichen Gründen der Punkt auch in dieser Kreislinie liegen, folglich dort seyn, wo beyde Kreise sich schneiden.

4) Vom Durchschnittspunkte der Kreise, nach den Endpunkten der zuerst gezogenen Linie zwey gerade Linien gezogen, so ist das Dreyeck vollendet.

Anmerkung.

Daß es zwey Dreyecke giebt, weil die Kreise sich in zwey Punkten schneiden können, ist an sich schon klar, so wie auch, daß diese Dreyecke einander gleich sind. Man hat nur nöthig, einen Kreisbogen zu ziehen, statt des ganzen Kreises, und von derjenigen Länge und in der ganzen Gegend, wohin man schließen kann, daß der dritte Punkt zu liegen kommt.

Vierte Aufgabe.

Fig. IV. Aus der Höhe und den Winkeln eines Dreyecks das Dreyeck zu zeichnen.

Ansicht.

Hier giebt es zwey Fälle: die gegebenen Winkel sind entweder die beyden an der Grundlinie, oder es ist einer davon derjenige Winkel, welcher der Grundlinie gegenüber

liegt. Es erleidet daher auch die Auflösung eine dieser Verschiedenheit entsprechende Aenderung. In beyden Fällen liegt der Fußpunkt der Höhenlinie und der Grundlinie in einer Linie. Die Höhe eines Punkts über einer Linie ist seine eigentliche Entfernung. Parallelen haben überall gleiche Entfernung von einander, folglich liegt der andere Endpunkt der Höhenlinie in derjenigen parallelen Linie mit der Grundlinie, welche die gegebene Höhe zu ihrer Entfernung hat. Zwischen zwey in ebenerwähnter Entfernung gezogenen Parallellinien sind aber unendlich viele Dreyecke möglich; um nun von allen diesen das Verlangte heraus zu zeichnen, dazu geben uns die zwey gegebenen Winkel Mittel an die Hand; denn eine Linie, gezogen zwischen den Parallellinien unter einem Winkel gleich dem gegebenen an der Grundlinie, giebt schon die Lage von zwey Punkten des Dreyecks in beyden Fällen.

Für den ersten bestimmt diejenige gerade Linie, die gezogen wird auf derjenigen Parallellinie, welche die Grundlinie enthaltend angenommen wurde, unter einem Winkel, gleich dem andern gegebenen an der Grundlinie, den dritten Punkt des Dreyecks, wenn sie den Endpunkt der zwischen den Parallelen gezogenen Linie trifft, und trifft diese Linie gedachten Endpunkt nicht, so entspricht die von demselben mit letzterer Linie gezogene Parallellinie der Aufgabe.

Im zweyten Falle bestimmt der dritte Punkt des Dreyecks diejenige Linie, die vom Höhenpunkte unter einem Winkel gleich dem gegebenen Winkel an der Spitze bis an die andere Parallele gezogen wurde.

Dies liefert folgende praktische Ausführung:

1) Man ziehe eine gerade Linie von unbestimmter Länge.

2) Mit dieser eine Parallele in einer Entfernung gleich der Höhe des Dreyecks.

3) Von irgend einem Punkt der erstern eine gerade Linie unter einem Winkel gleich dem gegebenen an der Grundlinie bis an die andere Parallele.

4) Für den ersten Fall eine zweyte Linie von irgend einem andern Punkt in der erstern Linie unter einem Winkel gleich dem zweyten gegebenen an der Grundlinie, und mit dieser Linie eine Parallele vom Höhenpunkt bis an die Linie, worinn die Grundlinie liegend angenommen wurde.

Für den zweyten Fall eine Linie vom Höhenpunkt bis an die andre Parallele unter einem Winkel gleich dem Winkel, der der Grundlinie gegenüber liegen soll.

Anmerkung.

Daß jeder dieser Fälle auf den andern reducirbar ist, erhellt von selbst, indem der dritte Winkel, wenn zwey gegeben sind, findbar ist.

Fünfte Aufgabe.

Fig. V. Aus der Höhe, Grundlinie und einem Winkel an derselben das Dreyeck zu zeichnen.

Auflösung und Beweis.

Die Grundlinie giebt schon zwey Punkte des Dreyecks; zieht man ferner eine Parallele mit derselben in einer Entfernung gleich der gegebenen Höhe, so liegt nothwendig nach den in voriger Aufgabe gesehenen Gründen der dritte Punkt in derselben. Da ferner der Winkel bekannt ist, den die von ihm an einem der Endpunkte der Grundlinie

gezogene Linie macht, so braucht man nur von derselben eine Linie unter diesem Winkel nach der Parallellinie zu ziehen, und man erhält diesen dritten Punkt; durch Verbindung desselben mit dem andern Endpunkte der Grundlinie bekömmt man das Dreyeck: denn alsdann ist jeder Bedingung der Aufgabe ein Genüge geleistet, folglich die Aufgabe gelöst.

Sechste Aufgabe.

Fig. VI. Aus der Höhe, Grundlinie und einer Seite des Dreyecks das Dreyeck zu zeichnen.

Auflösung und Beweis.

Von der Grundlinie und der in der Entfernung gleich der Höhe gezogenen Parallele gilt das in voriger Aufgabe Gesagte.

Was hier zur Bestimmung der Lage des dritten Punkts führt, ist dessen bekannte Entfernung von einem Endpunkte der Grundlinie. Um auch dieser letzten Forderung der Aufgabe ein Genüge zu leisten, braucht man nur von einem Endpunkte der Grundlinie, ihn als Mittelpunkt betrachtend, die Parallele durch einen Kreisbogen zu durchschneiden, dessen Halbmesser gleich ist der gegebenen Seite des Dreyecks, und von diesem Durchschnittspunkte nach den Endpunkten der Grundlinie gerade Linie zu ziehen.

Erste Anmerkung.

Die Reihenfolge dieser drey Aufgaben ist die nämliche, wie die der drey vorhergehenden.

1) Eine Linie und zwey Winkel.

2) Zwey Linien und ein Winkel.

3) Drey Linien und kein Winkel.

Zweyte Anmerkung.

Aehnliche Aufgaben lassen sich construiren, wenn man die Entfernung des Fußpunkts der Höhenlinie von dem Endpunkte der Grundlinie, welche Entfernung man Abschnitte nennt, ferner hier sowohl, als in den drey vorhergehenden Aufgaben, auch die Winkel, welche die Höhenlinie mit den Seiten bildet, als Data hätte benutzen wollen. Allein da hier die Aufgaben zu erschöpfen der Ort nicht ist, sondern blos die Hauptverschiedenheit derselben anzuzeigen, mit Anführung einiger Beyspiele zur Uebung, um dadurch die Kraft zur Auflösung anderer zu erwecken, so überlassen wir sowohl die Auffindung, als auch die Auflösung der Zwischen-Aufgaben, dem eigenen Fleiße des Studierenden, und gehen zur dritten Hauptklasse der Aufgaben über die Verzeichnung gleicher Dreyecke, die Uebungsaufgaben nach der Schwierigkeit ordnend.

In allen bisherigen Dreyecks-Aufgaben hatten wir solche Daten, die wirklich in den Dreyecken für sich bestanden, d. h. die nicht von der Zusammensetzung oder Vergleichung einzeln bestehender entlehnt waren. Allein nun müssen wir auch solche Aufgaben kennen und auflösen lernen, wobey der eben erwähnte Unterschied statt findet.

Siebente Aufgabe.

Fig. VII. Aus der Grundlinie, einem Winkel an derselben und der Summe der zwey übrigen Seiten, das Dreyeck zu zeichnen.

Ansicht.

Die Grundlinie giebt zwey Punkte des Dreyecks, und die Verzeichnung des gegebenen Winkels an dieselbe (einen

ihrer Endpunkte als Scheitelpunkt angenommen) giebt uns eine Linie, in der der dritte Punkt liegen muß. Macht man diesen Schenkel gleich der gegebenen Summe, so hätten wir auch die Gränzen, zwischen welchen er sich befindet. Zur völligen Bestimmung seiner Lage aber bieten uns diese beyden Linien nichts dar. Wir müssen daher Hülfslinien suchen, und zwar aus dem in Aufgabe Nr. 3. der Verzeichnung der Linie nach bestimmter Richtung angeführten Grunde, eine solche, die irgend eine zu findende Lage hat. Eine solche Linie wäre die Verbindungslinie der zwey Endpunkten des obigen Winkels. Nun müssen wir sehen, welches Verhältniß sie zu dem zu suchenden Punkte hat. Nimmt man zu dem Ende in derjenigen Linie, in welcher der dritte Punkt liegen muß, einen Punkt als den zu suchenden an, und verbindet ihn mit demjenigen Endpunkte der Grundlinie, mit welchem er noch nicht verbunden ist, so entstehet außer dem gesuchten Dreyecke auch noch ein anderes, und zwar ein gleichschenklichtes, dessen Grundlinie die erwähnte Verbindungslinie ist: denn, da die Entfernungen des dritten Punkts von den Endpunkten der Grundlinie zusammen genommen so groß seyn sollen, als der Schenkel, den wir gleich der gegebenen Summe der zwey Seiten machen, und eine dieser Entfernungen, d. h. eine Seite des Dreyecks in diesen enthalten ist, so muß die zweyte Entfernung, d. h. die andere Seite gleich dem Rest des Schenkels seyn, also wäre das Dreyeck als gleichschenklicht erwiesen.

Dieses leitet zu folgender

Praktischen Auflösung.

1) Man ziehe eine gerade Linie gleich der gegebenen Grundlinie.

2) Trage an einem ihrer Endpunkte einen Winkel gleich dem gegebenen.

3) Mache dessen Schenkel gleich der gegebenen Summe der zwey Seiten.

4) Verbinde dessen Endpunkte mit dem Endpunkte der Grundlinie.

5) Trage einwärts in das dadurch entstandene Dreyeck letztern Verbindungspunkt (Nr. 4.) als Scheitelpunkt angenommen, an die Verbindungslinie einen Winkel gleich demjenigen, den sie mit dem Schenkel (Nr. 3.) macht, so ist die bis an denselben gezogene gerade Linie die Bestimmungslinie des Dreyecks.

Achte Aufgabe.

Fig. VIII. 1, 2. Aus der Grundlinie, einem Winkel an derselben und der Differenz der zwey übrigen Seiten, das Dreyeck zu zeichnen.

Ansicht.

Hier giebt's zwey Fälle: entweder ist der Winkel von der Differenz und der Grundlinie eingeschlossen, oder nicht.

In beyden Fällen giebt die Grundlinie schon zwey Punkte des Dreyecks an. Um nun die Lage des dritten zu finden, so giebt die Verzeichnung des gegebenen Winkels an der Grundlinie schon eine Linie an, in welcher er liegen muß; um nun in dieser Linie seinen Ort zu finden, muß man sich des dritten Datums bedienen; denn denkt man sich die Aufgabe als aufgelöst, und vereinigt für den ersten Fall den Endpunkt desjenigen Schenkels, (Fig. VIII. 1.) der gleich ist der Differenz auf dem andern Endpunkte

der Grundlinie, so sieht man sehr leicht ein, daß dadurch zwey Dreyecke entstehen. Zur Verzeichnung des einen hat man folgende Data.

Zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel, nämlich die Grundlinie, die Differenz und den von beyden eingeschlossenen gegebenen Winkel. Dieses wäre also richtig zu verzeichnen. Betrachten wir das andere Dreyeck, so sehen wir, daß es gleichschenklicht ist. Zu seiner Verzeichnung hat man die Grundlinie (gefunden durch die Verzeichnung des ersten Dreyecks) und die Winkel an der Grundlinie; man kann also auch dieses Dreyeck zeichnen. Hieraus ergiebt sich für den ersten Fall, folgende

Praktische Auflösung.

1) Man ziehe eine gerade Linie gleich der Grundlinie.
2) Trage an einen der Endpunkte einen Winkel gleich dem gegebenen mit unbestimmt langem Schenkel.
3) Schneide auf demselben von seinem Scheitelpunkte aus die gegebene Differenz ab.
4) Vereinige den andern Endpunkt der Grundlinie mit dem Durchschnittspunkte.
5) Trage auf diese Verbindungslinie nach der nämlichen Seite hin den Endpunkt der gegebenen Linie als Scheitelpunkt betrachtend, einen Winkel gleich demjenigen, den die Verlängerung des zuerst gezogenen Schenkels mit der Verbindungslinie macht, so ist das dadurch entstandene gleichschenklichte Δ mit dem zuerst gezeichneten das Gesuchte.

Für den zweyten Fall. (Fig. VIII. 2.)

Da die Differenz kein Schenkel des gegebenen Winkels ist, so folgt, daß die diesem Winkel gegenüber liegende

Seite die längere sey, und zwar um die Differenz länger; denkt man sich diese kurze Seite um die Differenz rückwärts verlängert, und den Endpunkt dieser Verlängerung mit dem andern Endpunkte der Grundlinie verbunden, so sieht man von selbst ein, daß dem ersten Dreyeck ein zweytes hinzugefügt, und dadurch nun gleichschenklicht wurde; hieraus ergiebt sich aus leicht einzusehenden Gründen folgende

Praktische Auflösung.

1) Man ziehe eine gerade Linie gleich der gegebenen Grundlinie.

2) Trage an einen Endpunkt derselben einen Winkel gleich dem gegebenen mit unbestimmt langem Schenkel.

3) Verlängere rückwärts diesen Schenkel um ein Stück gleich der Differenz.

4) Vereinige den Endpunkt dieser Verlängerung mit dem andern Endpunkte der Grundlinie.

5) Von welchem Endpunkte der Grundlinie aus man an die Verbindungslinie nach der nämlichen Seite hin einen Winkel trägt gleich demjenigen, den die Verlängerung des zuerst gezogenen Schenkels mit der Verbindungslinie macht, so ist das dadurch entstandene gleichschenklichte Dreyeck weniger das zuerst gezeichnete das Gesuchte.

Anmerkung.

Im ersten Falle ist wohl zu merken, daß das zur Construction nöthig gewordene zuerst verzeichnete Dreyeck ein Theil des zu findenden ist.

Im zweyten Falle hingegen das nämliche Dreyeck abgerechnet werden muß.

Neunte Aufgabe.

Fig. IX. Aus zwey Winkeln und der Summe aller drey Seiten das Dreyeck zu zeichnen.

Ansicht.

Da uns die bloßen Data nicht unmittelbar zur Auflösung dienen, so müssen wir es mittelbar zu thun versuchen, damit wir die Verbindung der Data näher kennen lernen. In diesen und ähnlichen Fällen stellt man sich die Aufgabe als aufgelöst vor, und construirt sich aus der Annahme der Auflösung die Data in der Verbindung, und führt dies Verfahren noch nicht zu Mitteln für die Auflösung, so zieht man sich neue Hülfslinien, allein nicht aufs gerathewohl, sondern nach bekannten Verhältnissen. Die Anwendung des Gesagten auf gegenwärtige Aufgabe soll dies noch deutlicher beweisen.

Stellt man sich die Aufgabe als aufgelöst vor und sieht eine Seite des angenommenen Dreyecks als Grundlinie an, und verlängert diese zu beyden Seiten um die anliegende, d. h. so viel, daß die verlängerte Linie gleich ist der Summe aller drey Seiten, so hat der dritte Punkt des Dreyecks zu den Endpunkten der verlängerten Linie eine nothwendige Lage, welche wir nun näher untersuchen müssen: zu dem Ende vereinige man die beyden Endpunkte mit dem dritten Punkt des angenommenen Dreyecks, so sieht man auf jeder Seite desselben ein neues Dreyeck entstehen, und zwar ist jedes derselben ein gleichschenklichtes; denn indem die Grundlinie des angenommenen Dreyecks nach jeder Seite um so viel verlängert wurde, als die anliegende Seite groß war, so hat jedes derselben zwey gleiche Seiten bekommen. Untersuchen wir diese Dreyecke

genauer, so finden wir, daß zwey der uns bekannten Winkel in dem zu findenden Dreyecke Außenwinkel derselben sind, folglich so groß, als die zwey ihnen gegenüberstehenden Winkel in den gleichschenklichten Dreyecken, und da dies die gleichen Winkel in diesen Dreyecken sind, so ist jeder die Hälfte. Hieraus sehen wir schon, daß der eine Punkt des Dreyecks und eine Linie, in welcher die zwey andern liegen, verzeichnet werden kann, und die zwey andern durch Verzeichnung der gleichschenklichten Dreyecke ebenfalls bestimmt werden können, wie die daraus folgende

Praktische Auflösung

zeigt:

1) Man ziehe eine gerade Linie gleich der gegebenen Summe der drey Seiten.

2) Trage an einen der Endpunkte derselben einen Winkel gleich der Hälfte des einen gegebenen, mit unbestimmt langem Schenkel.

3) Nach der nämlichen Seite trage man an den andern Endpunkt der Grundlinie einen Winkel gleich der Hälfte des andern gegebenen Winkels, wo die zwey Schenkel sich treffen, dort liegt der eine Punkt des Dreyecks, und die zwey andern befinden sich in der zuerst gezogenen Linie.

4) Von diesem Punkte aus trage man an jede der zwey Linien einwärts in das Dreyeck denjenigen Winkel, den sie mit der die Grundlinie enthaltenden Linie macht, so ist das dadurch entstandene mittlere Dreyeck das Gesuchte aus leicht einzusehenden Gründen.

C.

Ueber die Verzeichnung ähnlicher Dreyecke.

Hier werden wir die nämliche Eintheilung und Reihenfolge beybehalten, also lehren:

1) Die Verzeichnung ähnlicher Dreyecke aus Daten, woraus die Aehnlichkeitslehre gefolgert wurde.

2) Die Verzeichnung ähnlicher Dreyecke aus Daten, die aus der Aehnlichkeitslehre als weitere Data zur Aehnlichkeit unmittelbar gefolgert wurden.

3) Die Verzeichnung ähnlicher Dreyecke aus Daten, die zwar aus der Aehnlichkeitslehre gefolgert wurden, aber nicht unmittelbar, sondern mittelbar durch Zusammensetzung und Vergleichung.

Von jeder Art werden wir drey Aufgaben zur Uebung auflösen.

Die Daten der drey ersten Aufgaben sind folglich von der in Nr. 1. verzeichneten Art.

Die Angabe der praktischen Auflösung von allen drey Aufgaben reicht also schon allein hin.

Erste Aufgabe.

Fig. 2. Aus zwey Winkeln eines Dreyecks ein ihm ähnliches zu zeichnen.

Auflösung.

1) Man ziehe eine gerade Linie von willkührlicher Länge.

2) Trage an einen der Endpunkte der Grundlinie einen Winkel = einem der gegebenen mit unbestimmt langem Schenkel.

3) Trage man nach derselben Seite hin an den andern Endpunkt der Grundlinie einen Winkel = dem andern gegebenen, so wird die hinlängliche Verlängerung seines Schenkels ein Dreyeck bilden, welches die verlangten Eigenschaften hat.

Zweyte Aufgabe.

Fig. 3. Aus dem Verhältnisse zweyer Seiten eines Dreyecks nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel das Dreyeck zu zeichnen.

Auflösung.

1) Man ziehe eine gerade Linie von willkührlicher Länge.

2) Trage an einen Endpunkt derselben einen Winkel gleich dem gegebenen, dessen Schenkel zu dem andern das verlangte Verhältniß hat; d. h. soll der eine Schenkel halb so groß seyn, wie der andere, so kann man entweder die erste Linie zweymal in die zweyte tragen, oder die zweyte Linie halb so groß machen, als die erste.

3) Man verbinde die Endpunkte der Schenkel, so hat das dadurch erhaltene Dreyeck die verlangte Eigenschaft der Aehnlichkeit.

Dritte Aufgabe.

Fig. 4. Aus dem Verhältnisse aller drey Seiten eines Dreyecks ein ähnliches zu zeichnen.

Auflösung.

1) Man ziehe eine Linie von willkührlicher Länge.

2) Von dem einen Endpunkte derselben beschreibe man

einen Kreisbogen, dessen Radius zu der angenommenen Linie ein Verhältniß hat gleich einem der gegebenen; d. h. wenn die eine Seite $\frac{2}{3}$ der andern seyn soll, und diese letztere als die zuerst gezogene Linie angenommen wurde, so hat der Radius des Bogens zwey Theile, wie die zuerst gezogene Linie drey hat.

3) Aus dem andern Endpunkte beschreibe man einen Kreisbogen, der den ersten schneidet, und dessen Radius zu der zuerst gezogenen Linie, oder zu dem Radius des ersten Bogens das gegebene Verhältniß hat.

Der Durchschnittspunkt dieser Kreisbögen ist der dritte Punkt des zu findenden Dreyecks, den man also nur noch mit den Endpunkten der zuerst gezogenen Linien zu vereinigen hat, um das Dreyeck zu vollenden.

Vierte Aufgabe.

Aus dem Verhältnisse der zwey Abschnitte und einem der anliegenden Winkel des Dreyecks ein ihm ähnliches zu zeichnen.

Ansicht.

Die Abschnitte sind die Entfernungen der Endpunkte der Grundlinie von dem Fußpunkte der Höhenlinie.

Da aber in jedem Dreyecke eine jede Seite als Grundlinie betrachtet werden kann, so muß hier auf die Verschiedenheit des Winkels, der der angenommenen Grundlinie gegenüber liegt, Rücksicht genommen werden; denn nimmt man die größere Seite zur Grundlinie an, so kommt der Fußpunkt der Höhenlinie allemal in die Grundlinie zu liegen; nimmt man aber eine andere Seite als Grundlinie an, so hat dies zwar bey den spitzwinklichten Drey-

ecken noch statt, allein bey den rechtwinklichten ist der eine Endpunkt der Grundlinie zugleich Fußpunkt der Höhenlinie, und das Verhältniß der Abschnitte unbestimmbar, und die Aufgabe wird daher folgende: Aus einem gegebenen spitzen Winkel eines rechtwinklichten Dreyecks ein ihm ähnliches zu verzeichnen.

Das Angeben des Dreyecks als rechtwinklicht heißt also für die vorher genannte Aufgabe gerade so viel als sagen: Aus einem Winkel ein ähnliches Dreyeck zu zeichnen, von dem sich das Verhältniß der Abschnitte nicht bestimmen läßt, diese Aufgabe ist also eine der vorherigen Aufgaben, hat folglich gleiche Auflösung.

Bey den stumpfwinklichten Dreyecken, wenn eine der kleinern Seiten als Grundlinie angenommen wurde, kommt der Fußpunkt nicht innerhalb, nicht ans Ende der Grundlinie, sondern in deren Verlängerung zu liegen; deßwegen können aus den Daten der Aufgabe, wenn nicht bestimmt wurde, ob eine der größern oder kleinern Seiten als Grundlinie angenommen wurde, zwey verschiedene Dreyecke gezeichnet werden, wovon aber nur eines dem zu findenden entspricht, obgleich das Verhältniß der Abschnitte und der Winkel gleich ist. Die bloße Ansicht der Figur reicht hin, dieses einzusehen. Fig. 5.

Es muß also zu der obigen Angabe der Daten noch hinzukommen, ob die größere Seite oder eine andere als Grundlinie angenommen wurde. Dies vorausgesetzt, so ist die leicht einzusehende

Praktische Auflösung

folgende:

Fig. 6. 1) Man ziehe eine gerade Linie von willkührlicher Länge, die man als einen der Abschnitte ansieht.

2) Verlängere dieselbe so, daß diese Verlängerung zu der ersten Linie das gegebene Verhältniß hat, d. h. wenn angegeben wurde, daß sich die Abschnitte wie eins gegen drey verhalten sollten, und die Grundlinie die größere Seite sey, so trägt man die erste Linie dreymal in die Verlängerung. Von dem Endpunkte der ersten Linie, der der Anfangspunkt der Verlängerung ist, errichte man eine rechtwinklichte Linie, so liegt in dieser Linie der dritte Punkt des Dreyecks, indem er ja nach der Aufgabe der Höhepunkt seyn muß.

3) Von dem Endpunkte desjenigen Abschnitts, an dem der gegebene Winkel liegen soll, trage man diesen Winkel auf; wo der Schenkel dieses Winkels die rechtwinklichte Linie trifft, dort ist der dritte Punkt des Dreyecks.

4) Diesen Punkt vereinige man mit dem andern Endpunkte der Grundlinie, so ist dieses Dreyeck das verlangte.

Anmerkung.

Wäre angegeben gewesen, man habe eine der kleinern Seiten als Grundlinie betrachtet, so hätte man zum Anfangspunkte des zweyten Abschnitts den Anfangspunkt der ersten Linie nehmen, und nach der nämlichen Seite hin ziehen müssen. Man sieht von selbst ein, daß in diesem Falle ein Abschnitt im andern liegt; im vorigen aber nur an einander liegen, und zusammen die Grundlinie ausmachen.

Fünfte Aufgabe.

Fig. 7. Aus dem Verhältnisse eines Abschnitts zu der Höhe, in einem Dreyecke, nebst dem Winkel, der am

andern Abschnitte liegt, ein ihm ähnliches Dreyeck zu zeichnen.

Auflösung.

Vorausgesetzt, daß die in vorhergehender Aufgabe angestellte Untersuchung und nähere Bestimmung der Daten statt hätte, so ist die

Praktische Auflösung

folgende:

1) Man ziehe eine gerade Linie von willkührlicher Länge.

2) Errichte auf einen ihrer Endpunkte eine rechtwinklichte Linie.

3) Mache das Verhältniß dieser zwey Linien gleich dem gegebenen, d. h. soll z. B. die Höhe zweymal so groß seyn, als der Abschnitt, so trage man die erst gezogene als Abschnitt betrachtete Linie zweymal in die rechtwinklichte.

4) Man verbinde die Endpunkte der Schenkel des Winkels.

5) Verlängere die erst gezogene Linie nach derjenigen Seite des Scheitelpunkts, welche die Data verlangen, unbestimmt lang.

6) An irgend einen Punkt der Verlängerung trage man einen Winkel gleich dem gegebenen; trifft der Schenkel dieses Winkels den Höhenpunkt, wie Fig. VII. a. so ist das Dreyeck vollendet; wo nicht, Fig. VII. b. so zieht man von dem Endpunkte der rechtwinklichten Linie eine Parallellinie mit dem Schenkel des Winkels, so schließt diese das Dreyeck auch.

Sechste Aufgabe.

Fig. 8. Aus dem Verhältniß eines Abschnitts zur Höhe nebst dem Winkel, den die Höhenlinie mit der Seite am andern Abschnitt macht, ein ähnliches Dreyeck zu zeichnen.

Vorausgesetzt, daß die in vorhergegangenen Aufgaben gemachte Untersuchung und Bestimmung der Daten statt hätte, so ist die

Praktische Auflösung

folgende:

1) Man ziehe eine gerade Linie.

2) Errichte an einem Endpunkte derselben eine rechtwinklichte Linie.

3) Mache das Verhältniß dieser zwey Linien gleich dem gegebenen.

4) Vereinige die Endpunkte dieses rechten Winkels durch eine gerade Linie.

5) Verlängere die erst gezogene Linie, die als Abschnitt angenommen wurde, nach derjenigen Seite, welche die Data verlangen, unbestimmt lang.

6) Von dem Endpunkt der Höhenlinie aus trage man einen Winkel gleich dem gegebenen, so wird der Schenkel desselben die Verlängerung No. 5. in irgend einem Punkt treffen, und so das Dreyeck schließen, welches aus leicht einzusehenden Gründen die verlangten Eigenschaften der Aehnlichkeit hat.

Siebente Aufgabe.

Aus dem Verhältniß der Grundlinie zur Differenz der

zwey Seiten, nebst einem Winkel an der Grundlinie, ein ähnliches Dreyeck zu zeichnen.

Ansicht.

Diese Aufgabe correspondirt der Aufgabe: aus der gegebenen Grundlinie, der Differenz der andern beyden Seiten, und einem Winkel an der Grundlinie ein gleiches Dreyeck zu zeichnen.

Hier wie dort giebt es zwey Fälle, entweder ist der gegebene Winkel von der Grundlinie und der Differenz eingeschlossen, oder er liegt derselben blos an. Dieser Unterschied wird hier wie dort eine Aenderung der Auflösung mit sich führen.

Die praktische Auflösung des ersten Falls ist folgende:

Fig. 10. 1) Man ziehe eine gerade Linie.

2) An dem einen Endpunkt trage man einen Winkel gleich dem gegebenen, mit unbestimmt langem Schenkel.

3) Von diesem Schenkel, vom Scheitelpunkt aus, schneide man ein Stück ab, das zur erst gezogenen Linie ein Verhältniß hat gleich dem gegebenen.

4) Vereinige den Endpunkt des abgeschnittenen Theils mit dem andern Endpunkt der Grundlinie.

5) An den Endpunkt dieser Linie trage man nach der nämlichen Seite hin einen Winkel gleich demjenigen, den sie mit der Verlängerung des andern Schenkels macht, wo der Schenkel dieses Winkels jene Verlängerung trift, da ist der dritte Punkt des zu suchenden Dreyecks, welches hierdurch geschlossen wird.

Die praktische Auflösung für den zweyten Fall ist folgende:

Fig. 11. 1) Man ziehe eine gerade Linie.

2) Trage an einen Endpunkt einen Winkel gleich dem gegebenen, mit unbestimmt langem Schenkel.

3) Verlängere diesen Schenkel rückwärts um ein Stück, das zu der erst gezogenen Linie das gegebene Verhältniß hat.

4) Verbinde den Endpunkt dieser Verlängerung mit dem andern Endpunkt der Grundlinie.

5) Denjenigen Winkel, den die Verlängerungs- und die eben gezogenen Verbindungslinie machen, trage man vom andern Endpunkt derselben aus nach der nämlichen Seite, so wird der Schenkel desselben den dritten Punkt des Dreyecks bestimmen, und das Dreyeck schließen.

Anmerkung.

Die nämlichen Bemerkungen, die bey den Aufgaben für die Verzeichnung gleicher Dreyecke, die diesen correspondiren, statt hatten, gelten auch hier, das nämliche gilt auch von der Auffindung der Auflösung und dem Beweise derselben.

Achte Aufgabe.

Fig. 12. Aus dem Verhältniß der Grundlinie zur Summe der zwey übrigen Seiten und einem Winkel an der Grundlinie eines Dreyecks, ein ihm ähnliches zu zeichnen.

Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf diejenige der ihr correspondirenden Aufgabe von der Verzeichnung gleicher Dreyecke, nämlich: aus der Grundlinie, der Summe der zwey übrigen Seiten, und einem Winkel an der Grundlinie, das Dreyeck zu zeichnen. Daher wird die bloße An-

gabe der Praktischen Auflösung zur völligen Einsicht hinreichen. Sie ist folgende:

1) Man ziehe eine gerade Linie, von willkürlicher Länge, sehe diese als die Grundlinie des zu zeichnenden Dreyecks an.

2) An einen ihrer Endpunkte trage man einen Winkel = dem gegebenen.

3) Mache den Schenkel desselben so groß, daß er zur Grundlinie das nämliche Verhältniß hat, wie das angegebene Verhältniß der Grundlinie zur Summe der zwey übrigen Seiten.

4) Verbinde den Endpunkt des Schenkels durch eine gerade Linie mit dem Endpunkt der Grundlinie.

5) An den Vereinigungspunkt dieser Linie, mit der Grundlinie, trage man, einwärts in das Dreyeck, einen Winkel = demjenigen, den sie mit der andern Linie macht, die dadurch entstandene Linie hinlänglich verlängert wird das verlangte Dreyeck schließen.

In den bisherigen Aufgaben war blos das Verhältniß der Linien gegeben, deßwegen wir auch immer die erste Linie willkürlich annehmen, und die Länge der andern sehr leicht dadurch bestimmen konnten, allein es hätte auch immer eine der Linien gegeben seyn können, welches Datum bey der Bestimmung der andern Linie uns in so weit beschränkt hätte, daß wir Theilungen hätten vornehmen müssen; wir müssen also auch Linien theilen lehren, und zwar

1) Eine Linie in zwey gleiche Theile.

2) Eine Linie in mehrere gleiche Theile beliebiger Anzahl.

3) Eine Linie in solche Theile zu theilen, die ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben.

Zur Auflösung der ersten Aufgabe verhilft uns die Eigenschaft der gleichschenklichten Dreyecke, daß die Spitzen derselben rechtwinklicht über dem Mittelpunkt ihrer Grundlinie liegen; wenn man daher zu der zu theilenden Linie zwey Punkte construiren kann, von denen man weiß, daß sie Spitzen von gleichschenklichten Dreyecken sind, welche beyde die zu theilende Linie zur Grundlinie haben, so mußte die Vereinigungslinie derselben die gegebene Linie in zwey gleiche Theile theilen. Die praktische Auflösung ist folgende:

Fig. 13. 1) Mit einer Eröffnung des Zirkels größer als die Hälfte der Linie beschreibe man zu beyden Seiten einen Kreisbogen von einem Punkt aus.

2) Von dem andern Endpunkt aus durchschneide man diese Bögen durch andere Bögen von gleichem Halbmesser wie die vorigen. Diese Durchschnittspunkte sind die oben erwähnten Spitzen der gleichschenklichten Dreyecke, wie von selbst erhellt.

3) Die Durchschnittspunkte vereinige man durch eine gerade Linie, oder mache sie auch nur so lang, bis sie die zu theilende Linie berührt, so ist der Durchschnittspunkt oder der Berührungspunkt der Mittelpunkt der zu theilenden Linie.

Zur Auflösung der zweyten und dritten Aufgabe verhilft uns die Eigenschaft der ähnlichen Dreyecke; nämlich daß die homologen (d. h. die gleichen Winkeln gegenüberliegenden) Seiten immer das gleiche Verhältniß untereinander haben; denn, indem man im Stande ist auf irgend eine Linie so viel gleiche Theile zu tragen, als Theile die gegebene Linie bekommen soll, so hat man nur nöthig, eben erwähnte Linie mit der gegebenen in eine solche Verbindung zu bringen, die geschickt ist uns die Schlüsse der Aehn-

lichkeit anwendbar zu machen; die praktische Auflösung ist folgende:

Fig. 14. 1) Von einem Endpunkt der gegebenen Linie ziehe man unter einem beliebigen Winkel eine gerade Linie.

2) Trage vom Scheitelpunkt aus eine kleinere Linie vermittelst des Zirkels so oftmal in die eben gezogene, als die gegebene Theile bekommen soll.

3) Den letzten Theilungspunkt vereinige man durch eine gerade Linie mit dem Endpunkt der gegebenen Linie.

4) Mit dieser Vereinigungslinie ziehe man von jedem Theilungspunkt aus eine gleichlaufende Linie nach der gezogenen; die Berührungspunkte sind dann die gesuchten Theilungspunkte; denn nun verhält sich, wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke, die zuerst gezogene Linie zu einem ihrer Theile, wie die gegebene Linie zu einem der ihrigen, allein da auf die erst gezogene Linie eben so viel gleiche Theile getragen wurden, als die zu theilende bekommen sollte, so muß auch die zu theilende Linie eben so viele gleiche Theile haben.

Fig. 15. Für die dritte Aufgabe, in welcher eine Linie nach einem bestimmten Verhältniß getheilt werden soll, ändert sich die Auflösung nur darin, daß man

Erstens auf die No. 1. gezogene Linie so viel Theile trägt, als die Summe der Verhältnißzahlen ausmacht. Z. B. wenn eine Linie in zwey Theile so getheilt werden soll, daß sie sich verhält wie 2 : 3; so trägt man darauf 2 + 3 = 5 Theile, indem ja nach der Angabe der eine zwey solcher Theile haben soll, wie der andere drey hat.

Zweytens hat man nur nöthig, von demjenigen Theilungspunkt, der die No. 1. gezogene Linie in das ge-

gebene Verhältniß theilt, eine Parallellinie zu ziehen nach der zu theilenden; also im angeführten Beyspiel nur vom zweyten Theilungspunkt aus. Ist endlich das Verhältniß der Linie selbst durch Linien angegeben, so entsteht dadurch die Aufgabe: zu drey gegebenen Linien die vierte Proportionallinie zu finden.

Fig. 16. Auch zur Auflösung dieser Aufgabe verhilft uns die erwähnte Eigenschaft ähnlicher Dreyecke; denn verbindet man die zwey Linien, welche das Verhältniß anzeigen, das eine dritte gegebene Linie zu einer vierten zu suchenden haben soll, unter einem beliebigen Winkel; verbindet ferner die Endpunkte seiner Schenkel, und trägt von dem Scheitelpunkt desselben die gegebene dritte Linie auf denjenigen Schenkel hin, der zu dem andern das nämliche Verhältniß hat wie die dritte Linie zur vierten haben soll, und zieht endlich von dem Endpunkt der dritten eine Parallellinie mit der Vereinigungslinie der Schenkel des Winkels nach dem andern Schenkel, so ist die Entfernung des Berührungspunktes vom Scheitelpunkt die gesuchte vierte aus leicht einzusehenden Gründen.

Erste Anmerkung.

Da wir nur Linienzeichen machen können, und diese immer eine gewisse Breite haben, so leuchtet von selbst ein, daß man den Winkel, unter dem die zwey Linien augelegt werden, nebst der willkürlich angenommenen Linie, so zu wählen habe, daß die Parallellinie die andere nicht unter einem zu kleinen Winkel trift, indem das Zeichen des Punktes dadurch kleiner, folglich bestimmter wird.

Zweyte Anmerkung.

Zur Uebung über Aufgaben, in welchen die Verhältnisse

der Linien durch Linien selbst angegeben sind, dienen folgende:

1) Aus der gegebenen Grundlinie eines Dreyecks, und dem durch Linien gegebene Verhältniß der Grundlinie zu der einschließenden Seite, nebst dem Winkel an der Grundlinie das Dreyeck zu zeichnen.

2) Eine gerade Linie in einem solchen Verhältniß in 2, 3, 4 rc. Theile zu theilen, wie 2, 3, 4 rc. Linien anzeigen.

Dritte Anmerkung.

Fig. 17. Um nun die so oft vorkommende Aufgabe von Theilungen der Linien und Aufsuchen anderer, die gegebene Verhältnisse haben sollen, mit mehr Schnelligkeit und Bequemlichkeit lösen zu können, so hat man schon lange das bekannte Mittel, Maasstab genannt, gefunden. Seine Verzeichnung stützt sich auf die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke, wie die bloße Ansicht leicht von selbst zeigt. Er ist also eigentlich nichts anders, als ein Mittel, das gemeinschaftliche Maas von mehrern Linien anzugeben, und dadurch ihr räumliches Verhältniß in ein arithmetisches zu verwandeln; vermittelst dieses Instruments kann man daher eben gelößte Aufgabe ohne Construktion lösen. Z. B. in der zur Uebung gegebenen ersten Aufgabe dürfte man nur die Verhältnißlinie auf dem Maasstab messen; so erhält man ihr arithmetisches Verhältniß; mißt man nun noch die Grundlinie, und sucht nach der Regeldetri die vierte proportionale, in dem man spricht, wie sich verhält das Maas der ersten Linie, die der Grundlinie correspondirt, zu dem Maas der zweyten, so verhält sich das Maas der gegebenen Grundlinie zu dem Maas derjenigen Linie, welche den Winkel einschließen soll, so braucht man nur die

dadurch gefundene Zahl, vermittelst des Maasstabes räumlich zu machen, so hat man diese Linie ohne geometrische Construktion durch bloße Berechnung gefunden.

Von der geometrisch-wichtigen Verbindung vier gerader Linien.

Zwey gerade Linien können auf den Endpunkten einer andern aufstehen:

I. Parallel und zwar hier

a) rechtwinklicht,
b) schiefwinklicht.

II. Nicht parallel

a) gleichwinklicht,
b) ungleichwinklicht.

In allen Fällen können die Linien seyn einander

1) gleich und zwar hier

a) jede gleich der Linie auf der sie aufsteht,
b) jede kleiner,
c) jede größer,

2) ungleich.

Verbindet man die Endpunkte der parallel aufstehenden gleichen Linien, so erhält man zwar sechs Vierecke, die aber der Form nach sich auf vier reduciren, und welche zusammen man Parallelogramme nennt.

Nach den Winkeln eingetheilt, so giebt es

a) rechtwinklichte,
b) schiefwinklichte Parallelogramme.

Die rechtwinklichten eben so wie die schiefwinklichten unterscheiden sich blos durch die Seiten; denn bey Fig. A sind alle Seiten einander gleich, und bey Fig. B nur die gegenüberstehenden; die Winkelart aber, hier rechte, ist bey beyden gleich.

Das erste nennt man Quadrat, das zweyte Rechteck.

Bey Fig. C sind ebenfalls alle Seiten gleich, und bey Fig D nur die gegenüberstehenden; die Winkelart aber, hier schiefe, ist bey beyden gleich.

Das erste nennt man Rhombus, das zweyte Rhomboide.

Nach den Seiten eingetheilt giebt es a) gleichseitige Parallelogramme; Quadrat und Rhombus; b) ungleichseitige Rechteck und Rhomboide.

Parallelogramme verhalten sich demnach als Formen zu einander auf folgende Art:

1) Quadrat zum Rechteck wie Rhombus zur Rhomboide, (Seitenverschiedenheit.)

2) Quadrat zum Rhombus wie Rechteck zur Rhomboide, (Winkelverschiedenheit.)

Hieraus ergiebt sich nothwendig,

3) Quadrat zur Rhomboide wie Rhombus zum Rechteck. (Seiten- und Winkelverschiedenheit.)

Bey Fig. E entstand durch die Verbindung der Endpunkte ein Viereck bey den zwey Seiten parallel, aber ungleich sind aus leicht einzusehenden Gründen. Man nennt ein solches Viereck Paralleltrapez.

Bey Fig. F giebt es ein Viereck, wovon keine Seite der andern parallel ist; dies nennt man Trapez.

Da wir mit den Parallelogrammen in Rücksicht ihrer Formenverhältnisse geendet haben, so nehmen wir nun andere Linien zu Hülfe, welche uns neue Eigenschaften in dieser Hinsicht kennen zu lernen Gelegenheit geben. Diese Linien sind die Ecklinien oder Diagonalen.

Hier sehen wir zuerst, daß zwey Diagonalen gezogen werden können; daß aber jede das Parallelogramm in zwey Dreyecke theilt, und zwey gleiche, weil in ihnen die Seiten einzeln genommen gegenseitig gleich sind.

Bey den gleichseitigen Parallelogrammen, Quadrat und Rhombus, theilt jede Diagonale das Parallelogramm in zwey gleichschenklichte Dreyecke, und zwar bey dem Quadrat in gleichschenklich-rechtwinklichte, bey dem Rhombus aber in gleichschenklich stumpf, und gleichschenklich-spitzwinkliche Dreyecke, je nachdem die größere oder kleinere Diagonale die Theilungslinie ist.

Bey den ungleichseitigen Parallelogrammen (Rechteck und Rhomboide) theilt jede Diagonale das Parallelogramm in zwey ungleichseitige Dreyecke, und zwar bey dem Rechteck nur in ungleichseitig-rechtwinklichte Dreyecke, und bey der Rhomboide in Dreyecke von verschiedener Art, je nachdem die größere oder kleinere Diagonale Theilungslinie ist.

Die Diagonalen schneiden sich bey den gleichseitigen Parallelogrammen rechtwinklicht: denn jede Diagonale theilt das Quadrat und den Rhombus in zwey gleichschenklichte Dreyecke; weil alle Seiten des Quadrats und Rhombus einander gleich, und immer zwey davon Seiten derjenigen Dreyecke sind, in welche die Diagonale das Parallelogramm theilt; folglich müssen die Winkel, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Diagonalen sind, von ihr halbirt werden. Dies gilt von jeder Diagonale,

Ist nun die eine gezogen, und man zieht die zweyte, so muß diese die erste rechtwinklicht schneiden, weil nach der Eigenschaft der gleichschenklichten Dreyecke jede Linie, die den Winkel an der Spitze halbirt, rechtwinklicht über dem Mittelpunkte der Grundlinie steht, und die erwähnten Winkel an der Spitze die zwey übrigen Winkel des Quadrats oder Rhombus sind; folglich schneiden sich die Diagonalen nicht allein rechtwinklicht, sondern auch in ihrem Mittelpunkt.

Bey den ungleichseitigen Parallelogrammen hingegen schneiden sich die Diagonalen schiefwinklicht: denn die anstoßenden Seiten des Rechtecks und der Rhomboide sind einander ungleich, folglich muß auch die Diagonale die Winkel in ungleiche Theile theilen, und zwar so, daß dem größern Winkel die größere Seite gegenüber steht, und dem kleinern Winkel die kleinere Seite. Da ferner die gegenüberstehenden Seiten einander gleich, und parallel sind, so hat man in jedem Paar gegenüberstehender Dreyecke (nämlich diejenigen, deren Grundlinie die gleichen Seiten des Parallelogramms sind,) eine Seite und die Winkel gleich; folglich sind auch die ganzen Dreyecke einander gleich, und weil die zwey übrigen Seiten in jedem Dreyeck Theile der zwey Diagonalen sind, so müssen diese die Hälften der Diagonalen seyn. Es schneiden sich also auch bey den ungleichseitigen Parallelogrammen die Diagonalen in ihrem Mittelpunkt.

Um nun zu beweisen, daß sie sich nicht rechtwinklicht, sondern schiefwinklicht schneiden, so wollen wir uns diesmal der indirecten Beweisart bedienen, um doch auch von ihr ein Beyspiel anzuführen, und weil die directe Beweisart jedem, der das Bisherige richtig gefaßt, ohnehin keine Schwierigkeit darbietet. Wir wollen also annehmen, daß

die Diagonalen sich rechtwinklicht schneiden; dies vorausgesetzt, so folgt, daß jeder Winkel am Durchschnittspunkt ein rechter ist, folglich in jedem Dreyecke immer zwey Seiten einzeln genommen nebst dem eingeschlossenen Winkel, immer zwey Seiten einzeln genommen nebst dem eingeschlossenen Winkel im andern Dreyecke gleich sind; daher alle Dreyecke einander gleich seyn müssen, folglich müßten die großen Seiten des Rechtecks oder der Rhomboide gleich seyn ihren kleinen Seiten, was unmöglich ist; es können daher die Diagonalen der ungleichseitigen Parallelogramme sich nicht rechtwinklicht schneiden, sondern schiefwinklicht. — Da bey den rechtwinklichten Parallelogrammen die Seitenwinkel immer dieselben sind, bey den schiefwinklichten hingegen verschieden, so müssen wir nun auch auf diese Verschiedenheit Rücksicht nehmen.

A für den Rhombus.

1) Ist der spitze Winkel in einem Rhombus gleich $\frac{2}{3}$ eines Rechten, so muß wegen der parallelen Lage der gegenüberstehenden Seiten der stumpfen Winkel $\frac{4}{3}$ R. seyn; die kleinern Diagonale theilt demnach den Rhombus in zwey gleichschenklichte Dreyecke, in denen jeder Winkel $=$ $\frac{2}{3}$ R. ist, folglich ist dies ein gleichseitiges Dreyeck;

Daher ist hier die kleine Diagonale gleich einer Seite des Rhombus.

2) Ist der spitze Winkel in einem Rhombus kleiner als $\frac{2}{3}$ R; so ist der stumpfe größer als Q $\frac{4}{3}$ R. Die kleine Diagonale theilt demnach den Rhombus in zwey gleichschenklichte Dreyecke, bey denen die Winkel an der Grundlinie einzeln genommen, größer sind als $\frac{2}{3}$ R, folglich ist hier die kleine Diagonale kleiner als die Seite des Rhombus. —

3) Ist der spitze Winkel in einem Rhombus größer als $\frac{2}{3}$ R, so ist der stumpfe Winkel kleiner als $\frac{4}{3}$ R, die kleine Diagonale theilt demnach den Rhombus in zwey gleichschenklichte Dreyecke, bey denen die Winkel an der Grundlinie, einzeln genommen, kleiner sind als $\frac{2}{3}$ R; folglich ist hier die kleine Diagonale größer als die Seite des Rhombus.

In allen drey Fällen aber ist die große Diagonale immer größer als eine Seite, weil sie den Rhombus immer in gleichschenklich-stumpfwinkliche Dreyecke theilt, und sie dem stumpfen Winkel gegenüber steht.

B. Für die Rhomboide.

Da die Diagonale die Winkel in der Rhomboide nicht in gleiche, sondern in ungleiche Theile theilt, so kann es folgende Verschiedenheiten geben;

1) Ist der spitze Winkel in der Rhomboide so beschaffen, daß die kleinere Diagonale mit der größern Seite einen ∠ bildet gleich der Differenz des stumpfen und spitzen Winkels, so theilt sie die Rhomboide in zwey gleichschenklich-spitzwinklichte Dreyecke;

Hier wäre die kleine Diagonale gleich der größern Seite.

2) Ist der spitze Winkel so beschaffen, daß die Diagonale mit der größern Seite einen ∠ bildet der kleiner ist als die Differenz beyder Winkel, so theilt die Diagonale die Rhomboide in zwey ungleichseitige Dreyecke, und zwar recht oder schiefwinklicht, je nachdem sie von dem stumpfen Winkel mehr oder weniger, oder gerade die Differenz zum rechten Winkel abschneidet.

Hier wäre folglich die kleine Diagonale kleiner als die große Seite.

3) Ist der spitze Winkel so beschaffen, daß die kleine Diagonale mit der größern Seite einen ∠ bildet größer als die Differenz beyder Winkel, so theilt die kleine Diagonale die Rhomboide in zwey ungleichseitig-spitzwinklichte Dreyecke, in welchen sie dem größern Winkel gegenüber steht.

Hier wäre also die kleine Diagonale größer als die große Seite der Rhomboide.

4) Ist der spitze Winkel in der Rhomboide so beschaffen, daß die kleinere Diagonale mit der größern Seite einen ∠ bildet gleich dem spitzen ∠, so theilt die Diagonale die Rhomboide in zwey gleichschenklichte Dreyecke, wovon die eine der gleichen Seiten die Diagonale ist, und die andere gleiche Seite die kleine Seite der Rhomboide; folglich wäre hier die kleine Diagonale = der kleinern Seite.

5) Ist der spitze Winkel so beschaffen, daß die kleine Diagonale mit der größern Seite einen ∠ bildet der größer ist als der spitze ∠ der Rhomboide, so theilt sie die Rhomboide in zwey Dreyecke, in welchen die kleinere Diagonale einem kleinern Winkel gegenüber steht, als die kleinere Seite; folglich wäre hier die kleine Diagonale kleiner als die kleine Seite.

6) Ist der spitze Winkel in der Rhomboide so beschaffen, daß die kleine Diagonale mit der größern Seite einen ∠ bildet der kleiner ist als der spitze ∠ der Rhomboide, so theilt die Diagonale die Rhomboide in zwey ungleichseitige Dreyecke, in welchen sie einem größern Winkel gegenüber steht, als die kleine Seite; folglich wäre hier die kleine Diagonale größer als die kleine Seite.

Gemeinschaftliches der Diagonalen aller Parallelogrammen.

1) Eine jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwey gleiche Dreyecke.

2) Eine jede Diagonale wird von der andern in ihrem Mittelpunkt durchschnitten.

Gemeinschaftliches der Diagonalen der rechtwinklichten Parallelogramme.

1) Die beiden Diagonalen in jedem rechtwinklichten Parallelogramm sind einander gleich.

2) Eine jede theilt das Parallelogramm nur in rechtwinklichte Dreyecke.

3) Eine jede Diagonale ist größer als eine Seite.

Gemeinschaftliches der Diagonalen der schiefwinklichten Parallelogramme.

1) Die beyden Diagonalen in jedem schiefwinklichten Parallelogramm sind einander nicht gleich.

2) Eine jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwey gleiche Dreyecke, welche an Form von denjenigen, in welche die andre Diagonale das Parallelogramm theilt, verschieden sind.

3) Die große Diagonale ist immer größer, als eine Seite.

4) Die kleine Diagonale kann größer, kleiner und gleich einer Seite seyn.

Gemeinschaftliches der Diagonalen gleichseitiger Parallelogrammen.

1) Jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwey

Dreyecke, wovon wenigstens zwey Seiten einander gleich sind.

2) Die Diagonalen schneiden sich rechtwinklicht, und bilden dadurch vier gleiche rechtwinklichte Dreyecke.

Gemeinschaftliches der Diagonalen ungleichseitiger Parallelogramme.

1) Die große Diagonale beym schiefwinklicht und die Diagonalen beym rechtwinklichten theilen immer das Parallelogramm in ungleichseitige Dreyecke.

2) Die Diagonalen schneiden sich schiefwinklicht und zwar desto ungleichwinklichter, je größer die Verschiedenheit der beyden Seiten ist.

Verschiedenheit der Diagonalen rechtwinklichter Parallelogramme.

a) Jede einzelne Diagonale des Quadrats theilt dasselbe in gleichschenklichte, und die Diagonalen des Rechtecks dasselbe in ungleichseitige Dreyecke.

b) Beym Quadrat schneiden sich die Diagonalen recht-beym Rechteck aber schief-winklicht.

c) Die beyden Diagonalen zugleich gezogen, theilen das Quadrat in vier gleichschenklicht recht-, die Diagonalen beym Rechteck theilen dasselbe in gleichschenklicht spitz- und stumpfwinklichte Dreyecke.

Verschiedenheit der Diagonalen schiefwinklichter Parallelogramme.

a) Die große Diagonale theilt den Rhombus in gleichschenklichte Dreyecke, die Rhomboide in ungleichseitige △ △.

b) Die kleine Diagonale kann beym Rhombus nur gleichseitige oder gleichschenklichte Dreyecke bilden; bey der Rhomboide hingegen kann sie nur gleichschenklichte oder ungleichseitige △△ bilden.

c) Beym Rhombus schneiden sich die Diagonalen recht- bey der Rhomboide aber schiefwinklicht.

d) Die beyden Diagonalen theilen den Rhombus in gleiche rechtwinklichte Dreyecke; die Rhomboide hingegen in schiefwinklichte Dreyecke, wovon nur die gegenüberstehenden gleiche Form haben.

Verschiedenheit der Diagonalen gleichseitiger Parallelogramme.

a) Die Diagonalen des Quadrats sind einander gleich, die des Rhombus ungleich.

b) Eine Diagonale kann das Quadrat nur in gleichschenklichte rechtwinklichte Dreyecke theilen, den Rhombus hingegen auch in gleichschenklichte, spitz- und stumpfwinklichte und in gleichseitige Dreyecke.

c) Wenn beyde Diagonalen zu gleicher Zeit gezogen werden, so wird durch dieselben das Quadrat in gleichschenklichte Dreyecke getheilt, bey dem Rhombus hingegen entstehen ungleichseitige.

Verschiedenheit der Diagonalen ungleichseitiger Parallelogramme.

a) Bey dem Rechteck sind die Diagonalen einander gleich, bey der Rhomboide ungleich.

b) Bey dem Rechtecke theilt jede Diagonale das Parallelogramm in ungleichseitig-rechtwinklichte Drey-

ecke; bey der Rhomboide aber theilt blos die große Diagonale das Parallelogramm immer in ungleichseitige stumpfwinklichte Dreyecke, die kleine hingegen kann auch in gleichschenklichte theilen.

c) Wenn beyde Diagonalen gezogen werden, so entstehen beym Rechtecke zwey Paar gleichschenklichte Dreyecke; bey der Rhomboide hingegen höchstens ein Paar gleichschenklichte und ein Paar ungleichseitige aus leicht einzusehendem Grunde.

Nach dem bisher Gesagten kann also jedes Parallelogramm angesehen werden:

1) Als Zusammensetzung zweyer gleich großer und gleiche Form habender Dreyecke, die eine Seite gemeinschaftlich haben, und bey denen die gegenüberstehenden Seiten gleichlaufend sind: die gemeinschaftliche Seite ist die Diagonale des Parallelogramms.

2) Als Zusammensetzung von vier gleich großen Dreyecken, wovon aber immer die gegenüberstehenden gleiche Form haben; alle haben eine gemeinschaftliche Spitze, und immer zwey und zwey eine gemeinschaftliche Seite, und die andern Seiten, die sich an der Spitze vereinigen, sind gegenseitige Verlängerungen, die zwey Seiten von den gleiche Form habenden Dreyecken, welche nicht in der Spitze zusammen kommen, sind gleichlaufend.

Für die rechtwinklichten Parallelogramme.

In Nr. 1. des vorher gesagten sind es in beyden rechtwinklichte Dreyecke, die die Hypothenuse gemeinschaftlich haben; bey dem Quadrat sind es recht-

winklicht gleichschenklichte, bey dem Rechtecke rechtwinklicht ungleichseitige Dreyecke, man mag eine Diagonale als Theilungslinie annehmen, welche man will.

Für die schiefwinklichten Parallelogramme.

In Nr. 1. der vorhergehenden Nr. ist es nicht gleichgültig, welche Diagonale man als Theilungslinie annimmt; die größere zwar theilt das Parallelogramm eben so, wie die kleinere, in zwey gleich große, aber nicht gleiche Form habende Dreyecke. Den Rhombus können wir, je nachdem die Winkel beschaffen sind, entweder als Zusammensetzung von gleichseitigen oder gleichschenklichten Dreyecken ansehen. Die Rhomboide kann man ebenfalls nach der Verschiedenheit der Winkel als Zusammensetzung von gleichschenklichen oder ungleichseitigen Dreyecken betrachten.

Für die gleichseitigen Parallelogramme.

In Nr. 2. werden beyde in vier gleiche Form habende rechtwinklichte Dreyecke getheilt, deswegen kann das Quadrat auch als Zusammensetzung von vier gleichschenklichten rechtwinklichten Dreyecken angesehen werden, welche den Scheitelpunkt des rechten Winkels zum Vereinigungspunkte haben. Ihre Hypothenusen sind die Seiten des Quadrats, und ihre Katheten die $\frac{1}{2}$ Diagonalen desselben. Der Rhombus wird durch beyde Diagonalen in rechtwinklichte ungleichseitige Dreyecke getheilt, und kann demnach als Zusammensetzung von vier ungleichseitigen rechtwinklichten Dreyecken angesehen werden, deren Vereinigungspunkt der Scheitel des rechten Winkels ist, die Hypothenusen sind die Seiten des Rhombus, die Katheten die $\frac{1}{2}$ Diagonalen.

Für die ungleichseitigen Parallelogramme.

In Nr. 2. werden beyde durch die Diagonalen in zwey Paar gleich große, aber nur Paarweis und zwar gegenüberstehende gleiche Form habende Dreyecke getheilt; bey dem Rechtecke in ein Paar gleichschenklich stumpfwinkliche Dreyecke, und in ein Paar gleichschenklich spitzwinkliche; es kann daher das Rechteck als Zusammensetzung von ein Paar gleichschenklich stumfwinklichter und ein Paar gleichschenklich spitzwinklichter Dreyecke, bey denen die gleichen Seiten in allen vier Dreyecken einander gleich sind, angesehen werden. Die gleichen Seiten sind die ½ Diagonalen, und die Grundlinien die Seiten des Rechtecks.

Bey der Rhomboide: in ein Paar stumpfwinklich ungleichseitige und ein Paar spitzwinklich ungleichseitige Dreyecke. Doch ist auch der Fall möglich, daß alle vier Dreyecke stumpfwinklich seyn können; jedoch sind alsdann die vier stumpfen Winkel nicht in ihrem Scheitelpunkt vereinigt aus leicht einzusehendem Grunde. Es kann die Rhomboide daher als Zusammensetzung von ein Paar stumpfwinklich und ein Paar spitzwinklichten ungleichseitigen Dreyecken, oder auch als Zusammensetzung von vier stumpfwinklich ungleichseitigen Dreyecken angesehen werden. Sie vereinigen sich in einem Punkte und die gleichen Seiten von jedem Paare gleicher Dreyecke haben einerley Richtung.

Da in Nr. 1. für die rechtwinklichten Parallelogramme es gleich viel war, welche Diagonale man als Theilungslinie annahm, indem man immer gleiche Form habende Dreyecke dadurch erhält, für die schiefwinklichen Parallelogramme hingegen durch Ziehung der größern Diagonale

Dreyecke entstanden, die eine andere Form hatten, als diejenigen, welche durch Ziehung der kleinen Diagonale entstanden, und doch in beyden Fällen die Dreyecke in Ansehung der Größe einander gleich waren, indem jedes das $\frac{1}{2}$ des Parallelogrammes ist, so führt uns diese Bemerkung ganz natürlich auf die Vergleichung von ungleiche Form habenden Parallelogrammen in Rücksicht auf ihre Größen.

Vergleichung der Parallelogramme als Raumgrößen, oder Lehre der Raumgleichheit ohne Formgleichheit.

Vom Leichtern zum Schwerern überzugehen, so vergleichen wir die Parallelogramme in folgender Ordnung:

1) Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen. (Fig. A.)

Hier gehört der schattirte Raum gemeinschaftlich der Rhomboide und dem Rechtecke, die nicht schattirten Dreyecke sind einander gleich; indem in beyden die Seiten einzeln genommen gegenseitig gleich sind. Da nun der schattirte Raum und ein Dreyeck die Rhomboide ausmachen, aber auch das Rechteck die nämlichen Bestandtheile hat, so folgt, daß die beyden Parallelogramme einander an Größe gleich sind. Hieraus folgt der so wichtige Lehrsatz: Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind in Rücksicht auf ihre Größen einander gleich, und da Dreyecke die Hälften der Parallelogramme sind, und was von den Ganzen wahr ist, auch von den Halben gilt, so sind die Dreyecke von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen einander gleich. (Fig. a.) Diese Sätze sind

uns Mittel, Dreyecke sowohl als Vierecke ohne Aenderung ihres Inhalts in andere Formen zu bringen.

2) Parallelogramme von gleichen Grundlinien, aber ungleichen Höhen. (Fig. B.)

Hier finden wir die schattirten Dreyecke einander gleich. Ferner vermöge des vorhergehenden Satzes die Rhomboide gleich dem Rechtecke, das aus dem mittlern Dreyecke und einem der schattirten besteht.

Dieses Rechteck aber muß von dem großen ein eben so vielster Theil seyn, als seine Höhe ein Theil der Höhe des letztern ist, folglich verhalten sich diese zwey Rechtecke wie ihre Höhen; daher auch die Rhomboide, folglich verhalten sich die Parallelogramme von gleichen Grundlinien, aber ungleichen Höhen, wie ihre Höhen. Was von den Ganzen gilt, gilt auch von den Halben, also verhalten sich Dreyecke von gleichen Grundlinien, aber ungleichen Höhen, wie ihre Höhen. (Fig. b.)

3) Parallelogramme von ungleichen Grundlinien und gleichen Höhen. (Fig. C.)

Hier finden wir die schattirten Dreyecke einander gleich, da die Rhomboide gleich dem Rechtecke, das aus einem schattirten und dem nicht schattirten Dreyecke besteht, dies Rechteck aber ist von dem großen ein eben so vielster Theil, als seine Grundlinie ein Theil der Grundlinie des erstern ist, folglich verhalten sie sich wie ihre Grundlinien, daher auch die Rhomboide und das Rechteck. Es verhalten sich folglich Parallelogramme von ungleichen Grundlinien, aber gleichen Höhen, wie ihre Grundlinien, demnach auch ihre Hälften die Dreyecke. Diese beyden Sätze Nr. 2 und 3 geben:

a) Den Aufgaben für die Verwandlung neuen Spiel-

raum, indem sie Mittel bieten, Parallelogramme und Dreyecke nicht wie in Nr. 1 in solche zu verwandeln, die zwar ungleiche Form, aber gleiche Grundlinie und Höhe haben, sondern auch in solche, bey denen Grundlinien und Höhen verschieden sind.

b) Uns Mittel an die Hand, Parallelogramme und Dreyecke zu theilen.

4) Parallelogramme, bey denen Grundlinien und Höhen im umgekehrten Verhältnisse stehen. (Fig. D. u. F.)

Hier sehen wir die schattirten Räume einander gleich. Hier giebt es zwey Fälle:

a) Entweder sind die Verhältnisse der Grundlinien und Höhen so beschaffen, daß die Höhe des einen Parallelogramms der Grundlinie des andern gleich ist, und umgekehrt, oder es findet dies nicht statt.

Im ersten Falle (Fig. D.) ergiebt sich die Gleichheit der Parallelogramme von selbst, indem man sich vorstellen kann, die Höhe des einen aufliegend auf der Grundlinie des andern, so wird die Grundlinie des erstern gleich der Höhe des zweyten Parallelogramms seyn, folglich beyde Parallelogramme gleiche Grundlinie und Höhe haben.

Im zweyten Falle (Fig. F.) ist vermöge des zweyten Satzes die Rhomboide a m $\frac{2}{3}$ des Rechtecks, aber vermöge des dritten Satzes die nämliche Rhomboide, ebenfalls $\frac{2}{3}$ der großen, folglich muß die große Rhomboide dem Rechteck gleich seyn. Auf gleiche Art wird die Gleichheit für jedes gegebene Verhältniß der Grundlinie und Höhe bewiesen, folglich ist allgemein wahr, Parallelogramme, bey welchen Grundlinien und Höhen im umgekehrten Verhältnisse stehen, d. h.

daß sich die Grundlinie des keinen Parallelogramms zur Grundlinie des andern sich verhält, wie die Höhe dieses zur Höhe jenes, einander gleich sind.

Es findet dieser Satz auch bey den Dreyecken, als Hälfte der Parallelogrammen statt.

5) Parallelogramme von ungleichen Grundlinien und ungleichen Höhen (Fig. G.)

Es sey zur Veranschaulichung die Grundlinie der Rhomboide gleich $\frac{2}{3}$ der Grundlinie des Rechtecks und die Höhe desselben gleich $\frac{3}{4}$ der Höhe des Rechtecks, so ist vermög des Satzes No. 2. die Rhomboide $\frac{3}{4}$ eines Rechtecks, das $\frac{2}{3}$ des gegebenen ist, $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$ sind aber $\frac{6}{12}$ gleich $\frac{1}{2}$. Denkt man sich von dem correspondirenden Theilpunkt aus die gezogenen Hülfslinien, so sieht man, daß die Rhomboide sechs solcher Theile hat, deren das Rechteck zwölfe begreift, die Ziehung der Hülfslinien, die uns das kleine Rechteck als gemeinschaftliche Theile der beyden Parallelogramme verschaften, wurden aber bestimmt, durch das bekannte Verhältniß der bekannten Grundlinien und Höhen, und die Anzahl der Theile die jedes Parallelogramm in sich faßt, durch das Produkt der Grundlinien in ihre Höhen; folglich stehen Parallelogramme von ungleichen Grundlinien und ungleichen Höhen im zusammengesetzten Verhältniß, d. h. sie verhalten sich wie die Produkte ihrer Grundlinie, in ihre Höhen.

Vergleichung der Dreyecke und Vierecke als Form.

Bey den Dreyecken hat das gleichseitige und rechtwinklicht-gleichschenklichte Dreyeck immer dieselbe Form, bey den Vierecken nur das Quadrat; bey ihm findet Gleich-

Bayerische Staatsbibliothek München

heit der Seiten und Winkel statt, bey dem gleichseitigen Dreyeck ist diese Gleichheit zwar auch, allein die Winkel in ihm sind nicht rechte, sondern blos durch die rechte als Theile derselben bestimmt. Das gleichschenklichte Dreyeck hat nur das Verhältniß der Winkel und der Seiten unter sich als Gleichheit.

Da nun das Quadrat als solche reine Einheit sich uns zeigt, so müssen wir zu fernern Vergleichungen dasselbe zum Maasstab nehmen; bey dieser Vergleichung ergiebt sich der so wichtige, durch alle Theile der Mathematik einflußreiche pythagoräische Lehrsatz.

Fig. I. In einem rechtwinklichten Dreyeck ist die Summe der Quadrate der Katheten, d. h. der den rechten Winkel einschließenden Seite = dem Quadrate der Hypothenuse; der Beweis gründet sich auf folgende allgemeine Grundsätze: wenn eine von zwey Größen einem Theil einer dritten gleich ist, und die zweyte Größe dem Rest der dritten, so ist auch die Summe der beyden ersten gleich der dritten Größe. Kann dies nicht unmittelbar gezeigt werden, so wiederholt man diese Theilung, d. h. kann von zwey Größen gezeigt werden, daß die Hälfte der einen gleich ist der Hälfte eines Theils der dritten, und die Hälfte der andern Größe gleich ist dem halben Rest der dritten, so folgt daß die halbe Summe der zwey ersten Größen gleich ist der halben der dritten, folglich auch die ganze Summe der zwey erstern gleich der ganzen Summe der dritten Größe. Dies auf den pythagorischen Lehrsatz angewandt, so wird durch Ziehung von Hülfslinien und Anwendung der Sätze der Gleichheit der Dreyecke gezeigt.

Fig. II. 1) Daß das Quadrat des einen Kathetus halb genommen gleich ist dem halben Rechteck im Quadrat der Hypothenuse das entsteht, wenn man vom Schei-

Bayerische Staatsbibliothek München

telpunkt des rechten Winkels auf die entferntere Seite des Quadrats der Hypothenuse eine rechtwinklichte Linie zieht, und welches mit ihm auf der nämlichen Seite der Linie liegt,

2) daß die Hälfte des Quadrats des andern Kathetus der Hälfte des andern Rechtecks gleich ist, folglich obiger Schluß angewandt, auch die ganze Summe der Quadrate der Katheten gleich seyn muß dem ganzen Quadrat der Hypothenuse.

Anmerkung.

Der Lehrer kann auch diesem Beweise den noch leichtern vorhergehen lassen, der sich ergiebt, wenn in das Quadrat von der Summe der Katheten des der Hypothenuse verzeichnet wird: denn alsdann erhellt, daß, wenn man von dem erwähnten Summenquadrat vier Dreyecke wegnimmt, auf der einen Seite das Quadrat der Hypothenuse bleibt, und wann ich die zwey durch die Zeichnung sich findenden Rechtecke, woran jedes das Produkt der Katheten ist, und gerade zwey solcher ΔΔ enthält, wegnahm, die Quadrate der Katheten bleiben, und da Gleiches von Gleichem abgezogen worden, die beyden Reste einander gleich seyn müssen; diese Reste sind aber einerseits das Quadrat der Hypothenuse, und anderseits die zwey Quadrate der Katheten, (Fig. III.) folglich ist das rechtwinklichte Dreyeck gleichschenklich, so sind die Quadrate der Katheten einander gleich, folglich das Quadrat der Hypothenuse = 2 × dem Quadrat eines der Katheten. Nimmt man den Kathetus als 1 an, so ist auch sein Quadrat gleich 1, folglich auch das Quadrat der Hypothenuse gleich 2, daher die Wurzel des Quadrats der Hypothenuse gleich $\sqrt{2}$, das heißt, es ist

in einem gleichschenklich-rechtwinklichen Dreyecke die Hypothenuse gerade um so viel größer als ein Kathetus als die $\sqrt{2}$ größer ist als 1, daher hat auch die Diagonale eines Quadrats zu ihren Seiten das nämliche Verhältniß.

Fig. V. Ist das Dreyeck ein stumpfwinkliches Dreyeck, so ist, wenn man den einen Schenkel des stumpfen Winkels durch dessen Scheitelpunkt verlängert, und von der gegenüberstehenden Spitze eine rechtwinklichte Linie auf diese Verlängerung zieht, das Quadrat der dem stumpfen Winkel gegenüberstehenden Seite nach dem pythagoräischen Lehrsatz gleich dem Quadrat der rechtwinklichten Linie mehr dem Quadrat der verlängerten Seite des Dreyecks. Will man nun dies durch die zwey andern Seiten ausdrücken, so finden wir die eine als Hypothenuse des durch die rechtwinklichte Linie und die Verlängerung der andern Seite entstandenen rechtwinklichten Dreyecks gleich dem Quadrat der rechtwinklichten Linie mehr dem Quadrat der Verlängerung, das, wie leicht einzusehen, dem kleinen Quadrate in der Ecke gleich ist. Das Quadrat der andern Seite ist, wie aus der Fig. sich ergiebt, alsdann noch um das doppelte Rechteck, dessen eine Seite die Linie selbst und deren andere Seite ihre Verlängerung zu klein ist, folglich ist auch die Summe der Quadrate der zwey Seiten um diese zwey Rechtecke zu klein, daher müssen ihr diese zwey noch zugesetzt werden, um dem Quadrat der, dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite gleich zu seyn. Daher ist in jedem stumpfstwinklichten Dreyecke das Quadrat der längsten Seite = der Summe der Quadrate der beyden andern Seiten mehr einem Rechte dessen eine Seite gleich ist dem Doppelten einer dieser Dreyecksseiten und dessen andere Seite die Verlängerung dieser nämlichen Dreyecksseite bis zum rechten Winkel ist. —

Ist das Dreyeck ein spitzwinklichtes, so finden wir,

1) wenn wir die Höhenlinie ziehen, daß das Quadrat der einen Seite = ist dem Quadrat der Höhenlinie mehr dem Quadrat des hier correspondirenden Abschnitts der Grundlinie, den wir den ersten Abschnitt nennen wollen. Soll nun diese Summe durch die andern Seiten ganz genommen, ausgedrückt werden, so sehen wir durch die Vergleichung der Quadrate, daß das Quadrat der Höhenlinie = ist dem Quadrat der andern Seite weniger dem Quadrat des zweyten Abschnitts.

2) Daß das Quadrat der Grundlinie um zwey Rechtecke, wovon das eine zu seiner längern Seite die Grundlinie, das andere aber die Grundlinie weniger dem zweyten Abschnitt, beyde aber den gleichen Abschnitt zur zweyten Seite haben, größer ist als das Quadrat des ersten Abschnitts; folglich muß der Summe der Quadrate der Grundlinie und der andern Seite 1) das Quadrat des zweyten Abschnitts und 2) die zwey eben erwähnten Rechtecke entzogen werden; das Quadrat des zweyten Abschnitts ist aber gerade die Differenz der zwey Rechtecken, folglich ist in einem spitzwinklichten Dreyeck, oder überhaupt das Quadrat einer Seite eines Dreyecks die einem spitzen Winkel gegenüber steht, gleich der Summe der Quadrate der zwey andern Seiten weniger dem doppelten Rechteck der einen Seite in dem zweyten Abschnitt.

Fig. IV. Bey dem gleichseitigen Dreyecke fällt die Höhenlinie auf die Mitte der entgegenstehenden Seite; nimmt man die Hälfte der Seite als 1 an, so ist das Quadrat der Höhenlinie $= 4 - 1 = 3$, folglich sie selbst gleich $\sqrt{3}$, d. h. die Höhenlinie ist um so viel kleiner als eine

Seite eines gleichseitigen Dreyecks als 2 größer ist als $\sqrt{3}$.

Aufgaben über die Vierecke.

Die Aufgaben in Rücksicht der Formverhältnisse haben drey Hauptabtheilungen.

1) Zeichnung,

2) Verwandlung,

3) Theilung.

Jede dieser Hauptabtheilungen hat wieder ihre Unterabtheilungen. Was die Zeichnung betrifft, so zerfällt diese wie die Verzeichnung der Dreyecke

a) In Verzeichnung aus Daten, die unmittelbar die Form liefert; nämlich Seiten und Winkel.

b) Verzeichnung aus Daten, welche zwar nicht unmittelbar die Form darbietet, aber doch in ihr ganz vorfindlich sind; nämlich Diagonalen, Höhenlinien und Winkel die dadurch entstehen.

c) Verzeichnung aus Daten, die aus Zusammensetzung, Trennung und Vergleichung der Data vom a und b hervorgehen; nämlich Summen, Differenzen und Verhältnisse der Seiten, Diagonalen und Höhenlinien.

Die Verwandlung theilt sich ab

a) In Verwandlung gleichartiger Formen; z. B. Vierrecke in Vierecke, Dreyecke in Dreyecke ꝛc.

b) Verwandlung in ungleichartige Formen; z. B. Vierecke in Dreyecke, Dreyecke in Vierecke ꝛc.

Die Theilungsaufgaben theilen sich ab

a) In solche, wo der Anfangs- oder Endpunkt der Theilungslinie,

b) In solche, wo irgend ein anderer Punkt der Theilungslinie,

c) In solche, wo die Richtung der Theilungslinie gegeben wurde.

In jedem dieser drey Fälle kann die Figur in gleiche, oder verhältnißmäßige Theile getheilt werden.

Verzeichnung.

Die Dreyecke erforderten drey Data zur Verzeichnung, und da das Viereck als Zusammensetzung von zwey Dreyecken angesehen werden kann, die eine Seite gemeinschaftlich haben, so bedarf man zur Verzeichnung von Vierecken nur fünf Data, weil die gemeinschaftliche Seite in beyden Dreyecken zugleich gegeben ist, wenn sie in einem gegeben ist. Die Anzahl dieser Daten erleidet zwar bey den Parallelogrammen eine scheinbare Verminderung; allein die in jedem Parallelogramm durch den bloßen Namen schon bekannten Eigenschaften müssen auch als Data angesehen werden.

Verzeichnung der Parallelogramme.

Wir werden eben so wie bey den Dreyecken für jede der obigen Abtheilungen eine Aufgabe auflösen.

Erste Aufgabe.

Die Seite eines Quadrats ist gegeben, man soll dies Quadrat zeichnen.

Auflösung.

Fig. II. Der Name Quadrat giebt uns die übrigen Daten alle zu erkennen, nämlich wir kennen die Größe der Winkel und die Gleichheit der Seiten; die praktische leicht-einzusehende Auflösung ist folgende:

1) Man ziehe eine gerade Linie = der gegebenen Seite,

2) Errichte an beyden Endpunkten derselben, nach der nämlichen Seite hin, rechtwinklichte Linien,

3) Mache jede gleich der gegebenen Seite,

4) Vereinige ihre Endpunkte durch eine gerade Linie.

Zweyte Aufgabe.

Aus der gegebenen Diagonale des Quadrats ein Quadrat zu zeichnen. (Fig. III.)

Auflösung.

Da die Diagonale das Quadrat in rechtwinklicht-gleichschenklichte Dreyecke theilt, und beyde Diagonalen einander gleich sind, so ziehe man

1) Eine gerade Linie gleich der gegebenen Diagonale.

2) Errichte auf dem Mittelpunkt derselben zu beyden Seiten eine rechtwinklichte Linie.

3) Mache jede derselben gleich der halben Diagonale,

4) Vereinige die vier Endpunkte dieser Linien durch gerade Linien, so ist das dadurch entstandene Viereck das verlangte Quadrat.

Dritte Aufgabe.

Aus der Differenz der einen Seite und der Diagonale eines Quadrats das Quadrat zu zeichnen. (Fig. IV.)

Ansicht.

Alle Quadrate sind einander ähnlich, und bey allen ist das Verhältniß der Seiten zur Diagonale gleich, folglich muß auch das Verhältniß der Differenz der einen Seite und der Diagonale zu einer Seite in allen gleich seyn; auf diesen Sätzen beruht folgende

Praktische Auflösung.

1) Man sehe die gegebene Differenz als Diagonale eines zu verzeichnenden Quadrats an, und verzeichne dasselbe,

2) Von dem einen Endpunkte der Diagonale aus trage man die Seite dieses verzeichneten Quadrats, so ist der Ueberrest die Differenz zwischen der Seite und der Diagonale.

3) Suche man auf obengegebene Art zu den drey Linien, nämlich zur ebengefundenen Differenz, zur Seite und zur Diagonale des kleinen Quadrats eine vierte geometrische Proportionale, in dem ja die Differenz der Seite des kleinen Quadrats und ihrer Diagonale zur Seite des kleinen Quadrats sich eben so verhalten muß, als wie die Diagonale, die die Differenz des zu suchenden größern Quadrates ist, zur Seite des größern Quadrats.

4) Nun vollende man das Quadrat.

Vierte Aufgabe.

Fig. V. Aus zwey Seiten ein Rechteck zu zeichnen.

Auflösung.

Wegen der Ungleichheit der Seiten muß die Anzahl der Daten um eins wachsen, die übrigen scheinbar fehlenden

giebt uns ebenfalls wieder der Namen zu erkennen; die Ausführung ist folgende:

1) Man ziehe eine gerade Linie, gleich einer der gegebenen Seiten.

2) Errichte auf beyden Endpukten, nach der nämlichen Seite, rechtwinklichte Linien jede gleich der zweyten gegebenen Linie.

3) Vereinige die Endpunkten durch eine gerade Linie, so ist das dadurch entstandene Viereck das verlangte Rechteck.

Fünfte Aufgabe.

Fig. VI. Aus einer Seite und der Diagonale das Rechteck zu zeichnen.

Auflösung.

1) Man ziehe eine gerade Linie, gleich der gegebenen Seite.

2) Errichte auf ihre Endpunkte rechtwinklichte Linien.

3) Von jedem Endpunkte der zuerst gezogenen Linie durchschneide man die gegenüberstehenden rechtwinklichten Linien durch einen Kreisbogen, dessen Radius gleich ist der gegebenen Diagonale.

4) Vereinige die Durchschnittspunkte durch eine gerade Linie, so vollendet diese das Rechteck.

Sechste Aufgabe.

Fig. VII. Aus der Diagonale und der Summe von zwey anstoßenden Seiten eines Rechtecks, das Rechteck zu zeichnen.

Auflösung.

Stellt man sich die Aufgabe als aufgelöst vor; und verlängert eine Seite um ein Stück gleich der andern Seite, und verbindet den Endpunkt der Verlängerung mit dem andern Endpunkt der andern Seite, so entsteht ein rechtwinklicht- gleichschenklichtes Dreyeck; zieht man daher

1) Eine gerade Linie gleich der Summe beyder Seiten, und

2) Von einem Endpunkt derselben eine Linie unter einem halben rechten Winkel, so liegt einer der Punkte des Rechtecks in dieser Linie, und zwey andere in der zuerst gezogenen. Da nun ferner die Diagonale die Entfernung der Endpünkte ist, und der andere Endpunkt der erst gezogenen Linie einer derselben ist, so braucht man

3) Von diesem Punkt aus die in No. 2. gezogenen Linien durch einen Kreisbogen zu durchschneiden, dessen Radius gleich der Diagonale ist.

4) Von diesem Durchschnittspunkt nach der ersten Linie eine rechtwinklichte Linie gezogen, so haben wir schon drey Punkte.

5) Durch Ziehung der Parallelen mit diesen zwey Linien erhalten wir den vierten, folglich das ganze Rechteck.

Siebente Aufgabe.

Fig. VIII. Aus einer Seite und einem Winkel ein Rhombus zu zeichnen.

Auflösung.

1) Man ziehe eine gerade Linie gleich der gegebenen.

2) Von einem Endpunkt derselben aus ziehe man einen Winkel gleich dem gegebenen, und mache dessen Schenkel so groß als die Seite des Rhombus.

3) Von dem Endpunkt jedes Schenkels dieses Winkels mit dem gegenüberstehenden Schenkel eine Parallele, so daß sie zusammen kommen, so wird das dadurch entstandene Viereck der verlangte Rhombus seyn.

Achte Aufgabe.

Fig. IX. Aus der Höhe und einem Winkel eines Rhombus, ein Rhombus zu zeichnen.

1) Man ziehe eine gerade Linie von unbestimmter Länge.

2) Mit dieser Linie ziehe man eine Parallellinie in einer Entfernung die gleich ist der gegebenen Höhe des Rhombus, so liegen in diesen zwey Linien zwey gegenüberstehende Seiten des Rhombus.

3) Von irgend einem Punkt dieser Linie aus ziehe man zwischen ihnen eine dritte Linie unter einem Winkel gleich dem gegebenen; diese Linie ist eine Seite des Rhombus.

4) Von dem Berührungspunkt dieser Linie mit den Parallellinien trage man nach der nämlichen Seite diese dritte Linie.

5) Vereinige man die Abschnittspunkte durch eine gerade Linie, so ist der Rhombus beschlossen.

Neunte Aufgabe.

Fig. X. Aus der Summe der Höh und einer Seite, nebst einem Winkel den Rhombus zu zeichnen.

Auflösung.

1) Man ziehe eine gerade Linie von unbestimmter Länge.

2) Von einem Endpunkt derselben ziehe man eine gerade Linie unter einem Winkel gleich dem gegebenen, so liegen in den Schenkeln dieses Winkels, seinen Scheitelpunkt mitgerechnet, drey Eckpunkte des Rhombus; es kommt also nur darauf an zu bestimmen, wie weit der Scheitelpunkt des Winkels von den zwey andern Eckpunkten entfernt ist, d. h. mit andern Worten, man muß eine Seite des Rhombus kennen; um diese zu finden, denke man sich die Höhenlinie von einem Eckpunkt des Rhombus aus, auf die gegenüberstehende Seite gefällt, so entstehet ein rechtwinklichtes Dreyeck, ferner denke man sich von dem Eckpunkt aus diese Höhenlinie so weit verlängert, als die Hypothenuse (gleich einer Seite) groß ist; den Endpunkt dieser Verlängerung verbunden mit dem Endpunkt der Hypothenuse, so entsteht ein zweytes Dreyeck, und zwar ein gleichschenklichtes, wovon der Aussenwinkel der Ueberfluß des stumpfen Winkel in dem zu suchenden Rhombus zum rechten ist, oder mit andern Worten, der so groß ist als der Winkels welcher dem spitzen Winkel des Rhombus zu 90° fehlt. Da nun ein Winkel des Rhombus gegeben, folglich alle bekannt sind, so kann man den oben erwähnten Winkel finden; da ferner die Winkel an der Grundlinje in gleichschenklichten Dreyecken einander gleich sind, so folgt, daß jeder in diesem Dreyeck die Hälfte der erwähnten ist.

Diese Einsicht giebt uns nun Mittel an die Hand die Seite des Rhombus zu finden; denn nun

3) Errichte man von dem Scheitelpunkt des gezogenen

Winkels eine rechtwinklichte Linie, und theile den dadurch entstandenen spitzen Winkel in zwey gleiche Theile durch eine gerade Linie.

4) Mache die rechtwinklichte Linie gleich der gegebenen Summe.

5) Von dem Endpunkt derselben aus mit der zuerst gezogenen Linie gegen die Theilungslinie des Winkels eine Parallellinie.

6) Von dem Durchschnittspunkt dieser zwey Linien auf die erst gezogene Linie eine rechtwinklichte Linie gefällt, so schneidet diese die Seite des Rhombus ab, den man nur zu vollenden hat.

Zehnte Aufgabe.

Fig. XI. Aus zwey Seiten und einem Winkel die Rhomboide zu zeichnen.

Auflösung.

1) Man ziehe eine gerade Linie gleich einer der gegebenen Seiten.

2) An den einen Endpunkt derselben ziehe man einen Winkel gleich dem gegebenen.

3) Mache dessen Schenkel gleich der zweyten gegebenen Seite, so hat man drey Punkte der Rhomboide.

4) An den Endpunkten der Schenkel des Winkels ziehe man jedesmal mit der gegenüberstehenden Seite Parallellinien, so daß sie zusammen kommen, so wird der Durchschnittspunkt der vierte Punkt der Rhomboide seyn, und das dadurch entstandene Viereck die verlangte Rhomboide.

Eilfte Aufgabe.

Fig. XII. Aus der Höh' der großen Diagonale und einem Winkel die Rhomboide zu zeichnen.

Auflösung.

1) Man ziehe eine gerade Linie von unbestimmter Länge.

2) Mit dieser ziehe man eine Parallellinie in einer Entfernung gleich der gegebenen Höhe.

3) Von irgend einem Punkt dieser Linie aus ziehe man zwischen sie eine Linie unter einem Winkel gleich dem gegebenen.

4) Von dem Scheitelpunkt des spitzen Winkels aus mit einer Eröffnung des Zirkels die gleich ist der großen Diagonale, durchschneide man die gegenüberliegende Parallele, so wird der Durchschnittspunkt der dritte Punkt der zu verzeichnenden Rhomboide seyn.

5) Von diesem Durchschnittspunkt aus ziehe man eine Parallele mit der dritten Linie, so wird die Rhomboide vollendet seyn.

Zwölfte Aufgabe.

Fig. XIII. Aus der großen Diagonale, ihrem Abstand von den Scheitelpunkten der stumpfen Winkel, nebst dem Winkel den die kleine Diagonale mit ihr macht, die Rhomboide zu zeichnen.

Auflösung.

1) Man ziehe eine gerade Linie gleich der gegebenen großen Diagonale, so haben wir schon zwey Punkte der Rhomboide.

2) In einer Entfernung gleich dem gegebenen Abstand ziehe man zu beyden Seiten der Diagonale, Parallellinien, so liegen in diesen die zwey andern Punkte. Da sich nun die Diagonalen in ihrem Mittelpunkt schneiden, so ziehe man

3) Von dem Mittelpunkt der großen Diagonale eine gerade Linie unter einem Winkel gleich demjenigen den die beyden Diagonalen bilden sollen.

4) Von den Berührungspunkten dieser Linie mit den Parallelen ziehe man nach den Endpunkten der großen Diagonale gerade Linien, so wird das dadurch entstandene Viereck die verlangte Rhomboide seyn.

Allgemeine Bemerkung über die Verzeichnung der Parallelogramme.

Bey dem Quadrat hatten wir nur ein Datum nöthig, wegen der Gleichheit der Seiten und Winkel.

Bey dem Rechteck mußten wir zwey Data haben, die Winkel sind zwar gleich, aber nicht die Seiten.

Bey dem Rhombus hatten wir auch nur zwey Data nöthig. Die Seiten sind zwar gleich, aber nicht die Winkel.

Bey der Rhomboide mußten wir hingegen drey Data haben, weil weder Seite noch Winkelgleichheit in ihr statt findet.

Hieraus sehen wir, daß der Name Parallelogramm im allgemeinen zwey Data enthält:

1) Die Gleichheit der gegenüberstehenden Seiten, und

2) Die parallele Lage derselben, welches so viel ist, als sagen, zwey nebeneinander liegende Winkel in dem zu verzeichnenden Vierecke sind gleich zwey rechten.

Für jedes Beywort wird ein Datum weniger.

Rechtwinklichte Parallelogramme erfordern zwey Data.

Rechtwinklicht=gleichseitige Parallelogramme oder Quadrate nur eines.

Gleichseitige Parallelogramme erfordern nur zwey Data.

Gleichseitig = rechtwinklichte Parallelogramme oder Quadrate nur eines.

Aus dem bisher gesagten leuchtet von selbst ein, daß die Verzeichnung der Paralleltrapeze vier Data verlangt; indem das Wort Paralleltrapez nur ein einziges Datum enthält, nämlich das, daß zwey Seiten eine parallele Lage haben; eben so leicht wird man einsehen, daß Trapeze, oder irregulaire Vierecke die ganze Anzahl Daten, nämlich fünf nöthig haben. Da diese als Zusammensetzung von zwey Dreyecken angesehen werden können, folglich ihre Verzeichnung von der Verzeichnung dieser Dreyecke abhängt, und oben Dreyecke zu verzeichnen gelehrt wurde, so brauchen wir uns hier nicht damit abzugeben, und überlassen das dem eigenen Fleiße des Studirenden.

Die mehrseitigen Figuren Fünfecke, Sechsecke ꝛc. können ebenfalls als Zusammensetzung von Dreyecken angesehen werden, folglich hängt auch ihre Verzeichnung von der Verzeichnung der Dreyecke ab, und wie bey jener Verzeichnung gleicher oder ähnlicher Dreyecke statt hatte, je nachdem die Data Daten der Gleichheit oder Aehnlichkeit wären, so muß auch hier dies statt finden, folglich gleiche oder ähnliche Vielecke verzeichnet werden können.

Aufgaben über die Verwandlung.

Erste Aufgabe.

Ein Rechteck in eine Rhomboide zu verwandeln von gleicher Größe, und wovon man einen Winkel kennt.

Auflösung.

Fig. I. Da Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe einander gleich sind, so sehe man eine Seite des Rechtecks als Grundlinie an, und trage

1) den gegebenen Winkel an dieselbe mit unbestimmt langem Schenkel.

2) Von dem andern Endpunkt der Grundlinie ziehe man mit diesem Schenkel eine Parallellinie nach der nämlichen Seite hin.

3) Verlängere man die der Grundlinie gegenüberstehende Seite des Rechtecks, bis sie beyde Linien verbindet, so ist die dadurch entstandene Rhomboide die verlangte.

Zweyte Aufgabe.

Fig. II. Ein Rechteck in ein Paralleltrapez zu verwandeln, wovon zwey Winkel, die an einer der parallelen Seiten liegen, bekannt sind.

Auflösung.

1) Man theile zwey gegenüberstehende Seiten des Rechtecks in zwey gleiche Theile.

2) Verlängere eine der übrigen Seiten die man als Grundlinie und die längere Seite des Paralleltrapezes ansieht.

3) Trage von dem Mittelpunkt dieser getheilten Seite aus einen Winkel gleich demjenigen, der einem der gegebenen zum rechten fehlt, oder, wenn die stumpfen Winkel des Paralleltrapezes gegegeben sind, den Ueberschuß über den rechten im ersten Falle auswärts, und im letztern einwärts, und verlängere den Schenkel zu beyden Seiten, so daß er sowohl die verlängerte Grundlinie als die gegenüberstehende Seite des Rechtecks trift, so schneidet dieselbe auf einer Seite des Durchschnittspunktes vom Rechteck ein Dreyeck ab, und legt auf der andern ein gleiches zu, aus leicht einzusehendem Grund; es hat demnach das Paralleltrapez mit ihm gleiche Größe.

Dritte Aufgabe.

Fig. III. Ein gegebenes Dreyeck in ein gleichschenklichtes zu verwandeln.

Auflösung.

Da Dreyecke von gleicher Grundlinie und Höhe einander gleich sind, und in den gleichschenklichten Dreyecken die Höhenlinie rechtwinklicht über dem Mittelpunkt der Grundlinie steht, so sehe man

1) Irgend eine Seite des gebenenen Dreyecks als Grundlinie an;
2) Errichte auf dem Mittelpunkt derselben eine rechtwinklichte Linie;
3) Mache diese gleich der Höhe des gegebenen Dreyecks;
4) Vereinige den Endpunkt dieser Höhenlinie mit den Endpunkten der Grundlinie, so hat das dadurch entstandene Dreyeck die verlangten Eigenschaften.

Diese Aufgaben hatten die Verwandlung in gleichartige Formen, rücksichtlich der Seitenanzahl zu ihrem Gegenstand; nun müssen wir auch Aufgaben auflösen lernen, die die Verwandlung in ungleichartige Formen beabsichtigen.

Vierte Aufgabe.

Fig. IV. Ein Parallelogramm in ein Dreyeck zu verwandeln.

Auflösung.

1) Man ziehe eine Diagonale, so theilt diese dasselbe in zwey Dreyecke, es kommt folglich nur darauf an, dem einen eine Grundlinie zu verschaffen, die mit der Grundlinie des andern nur eine Grundlinie ausmacht, denn alsdenn wird die dadurch entstandene Figur nur drey Seiten haben; um dies zu bewerkstelligen, ziehe man

2) von demjenigen Eckpunkt der der Diagonale und der verlängerten Grundlinie gegenüber liegt, eine Parallellinie mit der Diagonale, so entstehet ein neues Parallelogramm, dessen eine Diagonale die eine Seite des gegebenen Parallelogramms ist.

3) Zieht man die andere Diagonale dieses zweyten Parallelogramms, so ist das dadurch entstandene Dreyeck gleich dem gegebenen Parallelogramm.

Fünfte Aufgabe.

Fig. V. Ein Dreyeck in ein Rechteck zu verwandeln.

Auflösung.

Da Dreyecke die Hälften von Parallelogrammen von

gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind, so sind auch Parallelogramme, welche gleiche Grundlinien mit den Dreyecken haben, aber nur die Hälfte ihrer Höhen einander gleich, deßwegen hat man nur nöthig auf eine Seite des Dreyecks, die man als Grundlinie ansieht, ein Rechteck zu verzeichnen, dessen Höhe gleich ist der halben Höhe des Dreyecks. Wäre das Dreyeck in kein Rechteck, sondern in eine Rhomboide von bestimmtem Winkel zu verwandeln gewesen, so hätte man nur nöthig gehabt über eine Seite des Dreyecks eine Rhomboide zu zeichnen, welche den gegebenen Winkel enthielte, und die halbe Höhe hätte.

Sechste Aufgabe.

Fig. VI. Ein irregulaires Viereck in ein Dreyeck zu verwandeln.

Auflösung.

Diese Aufgabe ist mit Aufgabe No. 4. ganz gleich, und hat folglich auch mit ihr gleiche Auflösung, wurde aber deßwegen hier angeführt, um anschaulich zu zeigen, daß die Auflösungen für jede Gattung von Vierrecke dieselbe sey. Die Figur reicht allein hin die Auflösung anschaulich zu machen.

Siebente Aufgabe.

Ein Fünfeck in ein Parallelogramm von bestimmtem Winkel zu verwandeln.

Auflösung.

Wäre das Dreyeck bekannt, welches dem Fünfeck gleich ist, so würde diese Auflösung die von No. 5. seyn. Es

kommt also nur darauf an, das Fünfeck in ein Dreyeck zu verwandeln.

Zieht man eine Diagonale, so entsteht dadurch ein Dreyeck und ein Viereck; verwandelt man das Viereck in ein Dreyeck, so wird dieses mit dem vorigen Dreyeck ein Viereck bilden, gleich dem gegeben Fünfeck; dieses neue Viereck verwandle man ebenfalls wieder in ein Dreyeck, dieses Dreyeck endlich verwandle man in das Parallelogramm, das den gegebenen Winkel enthält, und mit dem Dreyeck zwar gleiche Grundlinie, aber nur dessen halbe Höhe hat; die Fig. VII u. VIII machen die praktische Auflösung schon an sich anschaulich.

Anmerkung.

Bey Fünfecken mit einem einwärtsgehenden Winkel gehört in manchen leicht aufzufindenden Fällen das durch Ziehung der Diagonale entstandene Dreyeck nicht zum Viereck, verändert aber die Auflösung nur um sehr Weniges. —

Achte Aufgabe.

Ein Sechseck in ein Viereck zu verwandeln.

Auflösung.

1) Man ziehe zwey Diagonalen, so daß dadurch das Sechseck in zwey Dreyecke und ein Viereck getheilt wird, wie Fig. 9 zeigt.

2) Die zwey Seiten-Dreyecke verwandle man in solche, deren Grundlinien mit der Grundlinie des zwischen ihnen liegenden Vierecks eine Linie ausmachen, so ist das dadurch entstandene Viereck von gleichem Inhalt mit dem Sechseck.

Anmerkung.

Daß dieses Viereck in ein Dreyeck und dieses Dreyeck wieder in Parallelogramme von bestimmten Winkeln verwandelt werden könne, leuchtet von selbst ein.

Neunte Aufgabe.

Tab. XI. Fig. I. Ein Quadrat zu zeichnen gleich der Summe von zwey gegebenen Quadraten.

Auflösung.

Da die Summe der Quadrate der Katheten gleich ist dem Quadrat der Hypothenuse, so braucht man nur die Seiten der gegebenen Quadrate unter einem rechten Winkel zu verbinden, so ist die Hypothenuse die Seite des Quadrats das ihnen gleich ist, und das darauf verzeichnete Quadrat das verlangte Quadrat selbst.

Wäre aus mehr als zwey Quadraten ein ihnen gleiches Quadrat zu machen, so ist diese Aufgabe nichts als eine Vervielfachung der ebengenannten; denn zuerst suche man nach eben angezeigter Art die Seite des Quadrats, das dem eben gefundenen und dem dritten der gegebenen Quadrate zusammen genommen gleich ist, so wird das letztgefundene Quadrat gleich seyn den drey ersten gegebenen Quadrate; nnd so fahre man fort.

Daß man auch zu einem gegebenen Quadrat ein anderes finden könne, daß das gegebene vervielfacht enthält, leuchtet ebenfalls ein; denn da die Diagonale des gegebenen Quadrats schon die Seite desjenigen ist, welches doppelt so groß ist, so braucht man nur mit derselben die Seite des gegebenen rechtwinklicht zu verbinden, so ist die Hypothenuse die Seite desjenigen Quadrats, das dem dop-

pelten sammt dem einfachen, d. h. also dem dreyfach gegebenen gleich ist; verbindet man die Seite des gegebenen Quadrats mit der Seite des letztgefundenen rechtwinklicht, und bildet ein rechtwinklicht Dreyeck, so ist die Hypothenuse desselben die Seite desjenigen Quadrats, welches dem dreyfachen sammt dem einfachen, also gleich dem vierfachen gegebenen ist, und so kann man fortfahren, bis der Aufgabe Genüge geleistet ist.

Daß Abkürzungen statt finden in gewissen Fällen, wird jeder wohl von selbst einsehen; denn soll z. B. ein Quadrat gezeichnet werden, das achtmal so groß ist als ein gegebenes, so hat man nur nöthig die Diagonale des gegebenen rechtwinklicht mit sich selbst zu verbinden, und ein rechtwinklicht Dreyeck zu bilden, so ist die Hypothenuse desselben schon die Seite des vierfach so großen Quadrats, und die Diagonale desselben die Seite des achtfachen.

Zehnte Aufgabe.

Fig. II. Ein Quadrat zu zeichnen gleich der Differenz von zweyen gegebenen.

Auflösung.

Da die Summe der Quadrate der Katheten gleich ist dem Quadrat der Hypothenuse, so muß auch das Quadrat des einen Kathets gleich seyn der Differenz des Quadrats der Hypothenuse und des Quadrats des andern Kathets, folglich braucht man nur die Seite des größern gegebenen Quadrats als Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks anzusehen, und das rechtwinklichte Dreyeck zu zeichnen, wovon die Hypothenuse gleich ist der Seite des größern Quadrats, und ein Kathet gleich der Seite des kleinern

Quadrats, so ist der andere Kathet die Seite des Quadrats das gleich ist der Differenz der zwey gegebenen.

Wären drey verschiedene Quadrate gegeben gewesen, und man hätte das Quadrat der Differenz der Differenzen des mittlern und größten, und kleinsten und mittlern verlangt, so sieht man wohl ein, daß dies ebenfalls nur die Vervielfachung der vorhergehenden Aufgabe ist, man hat nur nöthig

1) die Seite des Quadrats zu finden, auf eben erwähnte Art das gleich ist der ersten Differenz.

2) Die Seite des Quadrats zu finden, das gleich ist der zweyten Differenz, und endlich

3) die Seite des Quadrats zu finden, das gleich ist der Differenz der in No. 1 u. 2 gefundenen Differenzquadraten, so ist die Aufgabe aufgelöst.

Eilfte Aufgabe.

Ein Quadrat zu finden das ein bestimmter Theil von einem gegebenen sey, ist auch keiner großen Schwierigkeit unterworfen, denn hierzu verhilft uns die vorige Aufgabe; denn sollte z. B. ein Quadrat gefunden werden das gleich ist einem Drittel des gegebenen, so braucht man nur zwey anstoßende Seiten des gegebenen Quadrats in drey gleiche Theile zu theilen, und mit dessen Seiten von den Theilungspunkten aus Parallellinien zu ziehen, so wird das gegebene Quadrat in neun kleine Theile getheilt, wovon drey folglich ein Drittel sind, diese nach Anleitung der vorigen Aufgabe in ein ihnen gleiches Quadrat verwandelt, so hat man ein Quadrat gleich einem Drittel des gegebenen. Auch hier wie bey der vorhergehenden Aufgabe finden Abkürzungen in gewissen Fällen statt; denn sollte z. B.

ein Quadrat gezeichnet werden das gleich ist $\frac{3}{5}$ eines gegebenen, so sieht man leicht ein, (Fig. II b) wenn das gegebene in 25 kleine Quadrate getheilt ist, 15 davon $\frac{3}{5}$ ausmachen, wovon aber 9 schon für sich ein Quadrat bilden, folglich wenn man die übrigen 6 schon in ein Quadrat verwandelt hat, man nur mit der Seite desselben die Seite des $\frac{9}{25}$ enthaltenden Quadrats rechtwinklicht zu verbinden, und ein rechtwinklicht Dreyeck zu bilden nöthig hat, so ist die Hypothenuse desselben gleich der Seite des gesuchten Quadrats; solche und ähnliche Abkürzungen wird jeder Aufmerksame selbst finden.

Die Summe der Quadrate der Katheten ist gleich dem Quadrat der Hypothenuse; was von den ganzen gilt, gilt von den verhältnißmäßigen Theilen, und gilt von dem gleich vielfachen, folglich muß auch das halbe, drittel, viertel ꝛc. des Quadrats der Hypothenuse gleich seyn dem halben, drittel, viertel ꝛc. der Summe der Quadrate der Katheten; theilt man, den Satz anschaulich zu machen, die Quadrate in gleiche Theile z. B. in halbe, entweder in Rechtecke oder in gleichschenklicht-rechtwinklichte Dreyecke, so sieht man von selbst ein, daß die auf der Hypothenuse und Katheten verzeichnete Formen ähnlich sind, folglich der Satz von allen ähnlichen Figuren gelten muß, d. h. mit andern Worten, wenn auf die Hypothenuse irgend eine Figur gezeichnet wird, und auf die Katheten ähnliche Figuren, (Fig. III IV u. VI.) so sind die auf den Katheten verzeichneten Figuren beyde zusammen genommen gleich der Figur über die Hypothenuse.

Das gleiche gilt von den vervielfachten Quadraten wie Fig. V. zeigt; die Aufgaben über die Addition, Subtraction, Multiplication und Division der Quadate findet also auch bey allen ähnlichen Figuren statt, und die Auflösungen

sind im ganzen genommen die nämlichen, nur mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der Form, der zu addirenden, subtrahirenden, multiplicirenden und dividirenden Figuren.

Aufgaben über die Theilung der Dreyecke und Vierecke durch die Construktion.

Erste Aufgabe.

Fig. I. Ein Dreyeck in zwey gleiche zu theilen von einer Ecke aus.

Auflösung.

Weil der gegebene Eckpunkt als Spitze des Dreyecks angesehen werden kann, so brauche ich nur die gegenüberliegende Seite zu halbiren, und nach dem Theilungspunkt eine gerade Linie zu ziehen, so wird dieselbe das Dreyeck in zwey gleiche Theile theilen, dann jedes derselben hat mit dem Ganzen zwar gleiche Höhe, aber nur halbe Grundlinie.

Zweyte Aufgabe.

Fig. II. Ein Dreyeck von einer Ecke aus in zwey verhältnißmäßige Theile zu theilen.

Auflösung.

Auch hierzu verhilft uns der Satz, daß Dreyecke von gleichen Höhen sich wie ihre Grunlinien verhalten, denn sollten die zwey Dreyecke, in welches das ganze getheilt werden soll, sich verhalten wie 2 : 3, so dürfte man nur die der Ecke gegenüberliegende Seite des Dreyecks in 2 + 3 gleich fünf Theile theilen, überhaupt also in so viel Theile, als die Summe der Verhältnißzahlen anzeigt,

und nach demjenigen Theilungspunkt, welcher die Linie in das gegebene Verhältniß theilt, von der gegebenen Ecke aus eine gerade Linie zu ziehen, so wird diese das Dreyeck in die verhältnißmäßigen Theile theilen.

Dritte Aufgabe.

Fig. III. Ein Dreyeck von einem in einer Seite liegenden Punkt aus, in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Theilt man eine der übrigen Seiten in zwey gleiche Theile, und vereiniget den Theilungspunkt mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreyecks, so theilt diese Linie, nach dem vorhergehenden, das Dreyeck in zwey gleiche Theile; vereinigt man den Theilungspunkt, mit dem gegebenen Punkt, so ist zwar diese Linie eine Theilungslinie des Dreyecks, allein keine halbirende, denn dem einen Dreyeck giebt sie noch eins zu, und dem andern nimmt sie dasselbe, welches das schattirte ist; um nun diese Theilungslinie in eine halbirende zu verwandeln, so sieht man leicht ein, daß das Ganze sich reducirt auf die Aufgabe: das schattirte Dreyeck in ein anderes zu verwandeln, das mit ihm gleiche Höhe und zur Grundlinie die Verbindungslinie des gegebenen Punktes und des Theilungspunktes hat.

Dieser Bedingung wird durch Ziehung einer Parallele mit dieser Verbindungslinie, von der Spitze des Dreyecks, ein Genüge geleistet, denn alsdann hat man nur nöthig, den gegebenen Punkt mit dem Endpunkte der gezogenen Parallellinie zu vereinigen, so wird diese letztere Linie aus leicht einzusehenden Gründen der Aufgabe entsprechen.

Vierte Aufgabe.

Fig. IV. Ein Dreyeck von einem in einer Seite liegenden Punkte aus in zwey verhältnißmäßige Theile zu theilen.

Auflösung.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist mit der vorhergehenden im Wesentlichen ganz einerley, und unterscheidet sich von ihr nur darinn, daß eine der Seiten des Dreyecks, worinn der gegebene Punkt nicht liegt, in das gegebene Verhältniß getheilt wird.

Fünfte Aufgabe.

Fig. V. Von einem innerhalb des Dreyecks liegenden Punkte aus das Dreyeck zu halbiren.

Auflösung.

Theilt man irgend eine Seite des Dreyecks in zwey gleiche Theile, und vereiniget den Theilungspunkt mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreyecks, so halbirt diese Linie das Dreyeck. Liegt der gegebene Punkt in ihr, so ist sie die verlangte Theilungslinie; liegt der gegebene Punkt aber außerhalb derselben, so giebt sich durch seine Vereinigung mit ihren Endpunkten, daß dem einen Dreyeck ein anderes gegeben, und dem andern dasselbe genommen wird; diese Ungleichheit herzustellen, verhilft die Verwandlung des schattirten Dreyecks in ein ihm gleiches andere, das eine solche Lage hat, daß es dem einen der zwey obenerwähnten Dreyecke genommen und dem andern gegeben ist; die Verwandlung ergiebt sich aus der Figur.

Anmerkung.

Diese Aufgabe hat ihre Anwendung da, wo ein Gut

so getheilt werden soll, daß jeder Theilhaber z. B. zu einem Brunnen oder sonstigem Gegenstand kommen kann, ohne daß durch einen doppelten Weg Feld verloren geht 2c.

Sechste Aufgabe.

Fig. VI. Von einem innerhalb des Dreyecks liegenden Punkte aus das Dreyeck in zwey verhältnißmäßige Theile zu theilen.

Auflösung.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist im Wesentlichen die der vorhergehenden Aufgabe, und unterscheidet sich von ihr nur darinn, daß die eine Seite des Dreyecks nicht in gleiche Theile, sondern in das gegebene Verhältniß, z. B. wie zwey zu drey getheilt ist.

Siebente Aufgabe.

Fig. VII. Ein Dreyeck zu halbiren durch eine Linie, die mit irgend einer Seite gleich läuft.

Auflösung.

Da das abgeschnittene Dreyeck dem ganzen ähnlich ist, so folgt, daß das Quadrat einer seiner Seiten von dem Quadrat der correspondirenden Seite, in dem großen Dreyecke, ebenfalls die Hälfte seyn müsse. Verzeichnet man sich ein Quadrat auf derjenigen Seite, mit der die Theilungslinie parallel seyn soll, so muß das Quadrat der parallelen Theilungslinie halb so groß seyn, folglich zur Seite die Diagonale des vierten Theils des Quadrats haben, wie aus der Anschauung der Figur hervorgeht. Trägt man diese Diagonale auf diejenige Seite, mit welcher die Theilungslinie parallel seyn soll, und zieht ferner

von dem Endpunkte derselben mit derjenigen Seite des Dreyecks, mit welcher sie verbunden ist, eine Parallellinie, so ist der dadurch entstandene Berührungspunkt mit der andern Seite aus leicht einzusehenden Gründen ein Punkt der Theilungslinie, und wenn von ihm eine Linie parallel gezogen wird, mit derjenigen Seite des Dreyecks, mit welcher die Theilungslinie parallel gezogen werden soll, so ist sie die Theilungslinie selbst.

Achte Aufgabe.

Fig. VIII. Ein Dreyeck in zwey Theile zu theilen, nach einem gegebenen Verhältnisse, durch eine Linie parallel mit irgend einer Seite.

Auflösung.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist im Wesentlichen die der vorigen Aufgabe, und unterscheidet sich nur darinn, daß aus dem Quadrat derjenigen Seite, mit welcher die Theilungslinie parallel seyn soll, die Seite eines andern gesucht wird, das zu ihm das nämliche Verhältniß hat, wie das abgeschnittene Dreyeck zu dem ganzen, z. B. wie drey zu fünf. Diese Aufgabe wurde weiter oben aufzulösen gelehrt; mit der gesuchten Seite verfährt man übrigens wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Neunte Aufgabe.

Fig. IX. Ein Parallelogramm in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Diese kann auf dreyerley Art geschehen, entweder durch eine Diagonale, oder indem man zwey parallele

Seiten in zwey gleiche Theile theilt und die Theilungspunkte vereinigt, wie die Figur zeigt, oder endlich durch den Mittelpunkt der beyden Diagonalen irgend eine gerade Linie zieht.

Zehnte Aufgabe.

Fig. X. Ein Parallelogramm in zwey gleiche Theile zu theilen durch eine Linie, die mit irgend einer andern gegebenen eine parallele Lage haben soll.

Auflösung.

1) Man ziehe eine Diagonale.

2) Durch den Mittelpunkt derselben eine Linie parallel mit der gegebenen, so halbirt diese das Parallelogramm aus leicht einzusehenden Gründen.

Eilfte Aufgabe.

Fig. XI. Eine Paralleltrapez in zwey gleiche Theile zu theilen durch eine Linie parallel mit den parallelen Seiten.

Auflösung.

Diese Aufgabe reduzirt sich auf die achte Aufgabe, denn vollendet man das Dreyeck, wovon das Paralleltrapez ein Theil ist, so sieht man wohl ein, daß man das Verhältniß desselben zu demjenigen Dreyecke, welches dem Paralleltrapez fehlt, leicht bestimmen könne, und dadurch die Aufgabe in folgende verwandelt werden kann: Ein Dreyeck durch eine Linie parallel mit einer Seite in zwey verhältnißmäßige Theile zu theilen. Sie hat folglich mit der achten Aufgabe die gleiche Auflösung.

Anmerkung.

Auf eine ähnliche Art reducirt sich auch die Aufgabe ein Dreyeck in eine beliebige Anzahl Theile zu theilen parallel mit irgend einer gegebenen Richtung.

Zwölfte Aufgabe.

Fig. XII. Eine gegebene Figur so in 2 Theile zu theilen, daß der eine derselben dem Ganzen ähnlich sey.

Auflösung.

Zieht man von irgend einer Ecke die Diagonalen, so sieht man wohl ein, daß die dadurch entstandenen Dreyecke halbirt werden müssen, durch Theilungslinien parallel mit ihren Grundlinien, die Ecke, woraus die Diagonalen gezogen wurden, als gemeinschaftliche Spitze angenommen. Hat man eines derselben auf eben genannte Art getheilt, so braucht man nur von den Endpunkten der Theilungslinie Parallellinien mit der Grundlinien der anstoßenden Dreyecke zu ziehen, so erhält man die Theilungslinie der anstoßenden Dreyecke; mit dieser Theilungslinie verfahre man wie mit der vorhergehenden, bis die Figur vollendet ist. Da sich die Auflösung der Aufgabe auf die der siebenten reducirt, dort aber zur Veranschaulichung das ganze Quadrat ausgezogen wurde, so soll hier nur das zur Construktion Nöthige angegeben werden.

1) Auf die Mitte der Grundlinie irgend eines der Dreyecke, in welche die zu theilende Figur durch die Diagonalen getheilt wurde, errichte man eine rechtwinklichte Linie;

2) mache sie gleich der halben Grundlinie;

3) ziehe die Hypothenuse und trage sie von einem Punkt der Grundlinie aus in dieselbe;

4) von einem Endpunkt mit derjenigen Linie, mit der sie verbunden ist eine Parallele, wo diese die andere Seite des Dreyecks trift, von da aus ziehe man

5) eine Parallele mit der Grundlinie, so ist ein Dreyeck halbirt.

Hier in gegenwärtigem Beyspiele ist die Construktion auf ein Seitendreyeck angewandt, deßwegen hat man nur von einem Endpunkt derselben aus die Theilungslinie des mittlern Dreyecks zu ziehen, und von dem Endpunkt dieser zweyten Theilungslinie die dritte. Man sieht von selbst ein, daß man die Construktion ebenfalls auf das mittlere Dreyeck hätte anwenden können.

Vom Kreise oder Cirkel.

Tab. XIV.

Fig. 1. Wenn sich ein Punkt in einer ebenen Fläche so um einen andern bewegt, daß er immer gleich weit von ihm entfernt bleibt, und wieder auf die nämliche Stelle zurück kömmt, so beschreibt er, wie oben schon gelehrt worden, einen Kreis, d. h. eine in sich zurücklaufende krumme Linie, wovon jeder Punkt von einem in der nämlichen Ebene liegenden Punkt, (Mittelpunkt oder Centrum genannt) gleich weit entfernt ist.

Von den geometrisch-wichtigen Verbindungen gerader Linien und Kreise.

a) Von einer geraden Linie.

1) Jede gerade Linie vom Mittelpunkt aus bis an die

Kreislinie, die man auch Peripherie der Kreisfläche nennt, heißt Halbmesser oder Radius.

Alle Radii sind einander gleich.

Ein Endpunkt der Radien hat bey allen immer die nämliche Lage, nämlich im Mittelpunkt und der andere in der Peripherie.

Fig. 2. 2) Jede gerade Linie, deren Endpunkte in der Peripherie liegen, heißt Sehne oder Chorde, und zwar, wenn sie durch den Mittelpunkt geht, nennt man sie zum Unterschied Durchmesser oder Diameter. Alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich, denn sie sind gleich zwey Radien des nämlichen Kreises. Nicht alle Sehnen sind einander gleich. Je näher dem Centrum, desto größer. Die Durchmesser sind die größten Sehnen. Die vom Mittelpunkt gleich weit abstehenden Sehnen sind einander gleich, weil jede Hälfte des Cirkels der andern gleich ist. Eine jede Sehne theilt den Kreis in zwey Flächen, wovon jede durch einen Kreisbogen und eine Sehne begrenzt ist, solche Flächen nennt man Segmente oder Kreisabschnitte.

3) Jede gerade Linie, die den Kreis nur in einem Punkt berührt, heißt Berührungslinie oder Tangente.

4) Jede gerade, Linie die den Kreis schneidet, heißt Durchschnittslinie oder Sekante. Tangenten und Sekanten haben in Ansehung ihrer Endpunkte keine bestimmte Lage, auch ihre Größe ist unbestimmt.

Allgemeine Folgerungen.

Von allen eben genannten Linien haben bloß die Halb- und Durchmesser eine bestimmte Größe, und bloß Halb- und Durchmesser und Sehnen in Ansehung ihrer Endpunkte

eine bestimmte Lage. Was die Größe der Sehnen betrift, so ist bloß ihr Maximum (gleich dem Durchmesser) bestimmt.

b) Von zwey geraden Linien

1) zwey Radii;

Fig. 3. Diese theilen den Cirkel in zwey Flächen, wovon jede durch einen Theil der Peripherie (Kreisbogen) und zwey Radien begrenzt ist; solche Flächen heißt man, Sectoren oder Ausschnitte.

Die Winkel, die beyde Radii miteinander machen, heißt man, wegen der Lage ihres Scheitelpunkts, Winkel am Mittelpunkt oder Centriwinkel. Zwey Radii bilden also zwey Centriwinkel gleich vier Rechten; folglich wenn der eine kleiner ist, als ein Rechter, so ist der andere größer, als drey Rechte, und wenn er größer ist, als zwey Rechte, so ist er der größte. Winkel, die größer sind, als zwey Rechte, nennt man auswärtsgehende Winkel.

2) Zwey Sehnen.

a) Ein Durchmesser und eine Sehne in einem Punkt der Peripherie miteinander verbunden.

Fig. 4. Diese auf solche Art gebildete Winkel, nennt man, wegen der Lage ihres Scheitelpunkts, Peripheriewinkel. Da die Centriwinkel immer durch die Bogen, worauf sie stehen, verglichen werden können, weil das größer oder kleiner seyn derselben, das größer oder kleiner seyn der Kreisbögen nach sich zieht, im nämlichen Verhältniß, d. h. da die Centriwinkel ein eben so vielster Theil von vier Rechten sind, als die Bogen, worauf sie stehen von der ganzen Peripherie, folglich zu ihrem ei-

gentlichen Maas gedachten Bogen haben, so vergleicht man die Peripheriewinkel mit den Centriwinkeln, weil letztere wieder etwas festes zur Vergleichung darbieten. Denkt man sich zu dem Ende vom Centrum nach dem Endpunkte der Sehne einen Radius, so entsteht dadurch ein gleichschenklichtes Dreyeck, dessen Aussenwinkel der Centriwinkel ist, der mit dem Peripheriewinkel auf gleichem Bogen steht. Er ist also gleich den Winkeln die ihm im Dreyeck gegenüber stehen; da diese aber einander gleich sind, und einer davon der Peripheriewinkel ist, so ist er auch doppelt so groß, als der Peripheriewinkel, folglich ist das Maas eines Peripheriewinkels der halbe Bogen worauf er steht.

b) Zwey Sehnen in einem Punkt der Peripherie verbunden, den Mittelpunkt zwischen sich habend.

Fig. 5. Auch solche Winkel nennt man der nämlichen Ursache wegen, Peripheriewinkel.

Auch hier findet in Ansehung der Größe die vorhergehende Wahrheit statt; denn denkt man sich von seinem Scheitelpunkt durch den Mittelpunkt nach der Peripherie eine gerade Linie, so theilt diese den Winkel in zwey Theile, wovon jeder nach dem vorhergehenden Falle den halben Bogen worauf er steht zu seinem Maas hat, da nun beyde Winkel den ganzen Winkel ausmachen, so muß auch das Maas beyder zusammen genommen, das Maas des ganzen Winkels seyn, folglich der halbe Bogen worauf er steht.

c) Zwey Sehnen in einem Punkt der Peripherie verbunden, auf einer Seite des Mittelpunkts.

Fig. 6. Auch hier findet sowohl die Benennung des

Winkels, als auch obige Wahrheit in Ansehung seiner Größe statt; denn denkt man sich vom Scheitelpunkt einen Durchmesser, so entsteht dadurch mit jeder Sehne ein Peripheriewinkel von der Art (a), deren Differenz gleich ist dem zu vergleichenden Peripheriewinkel, folglich muß auch die Differenz ihrer Maaße, das Maas des Peripheriewinkels seyn, dieser ist aber gleich dem halben Bogen worauf der Peripheriewinkel steht, folglich ist dieser sein Maas.

Also ist allgemein erwiesen, Peripheriewinkel haben die Hälfte des Bogens worauf sie stehen, zu ihrem Maas.

d) Zwey Sehnen die sich schneiden.

Fig. 7. Diese bilden zwey Paar Scheitelwinkel. Um die Größe dieser Winkel zu bestimmen, denkt man sich eine Sehne gezogen, die zwey Endpunkte der vorigen verbindet, hierdurch entsteht ein Dreyeck, von dem das eine Paar Scheitelwinkel, deren Größe bestimmt werden soll, Aussenwinkel sind, und als solche gleich den ihnen gegenüber stehenden zwey Peripheriewinkeln, daher ist auch das Maas eines solchen Winkels dem Maas dieser zwey Peripheriewinkel zusammen genommen, dieses Maas ist aber gleich der halben Summe beyder Bögen worauf sie stehen, folglich ist auch das Maas eines solchen Winkels gleich der halben Summe dieser beyden Bögen.

Erste Anmerkung.

Fig. 8. Jeder Peripheriewinkel, dessen Schenkel auf dem Diameter aufstehen, ist ein Rechter; hieraus ergiebt sich noch folgende, Art an dem Endpunkt einer geraden Linie eine rechtwinklichte Linie zu errichten.

Fig. 9. 1) Man setze in einem beliebigen Punkt den Cirkel ein (ausserhalb der Richtung der gegebenen Linie.)

2) Eröffne ihn bis an den bestimmten Endpunkt der Linie und beschreibe mit dieser Eröffnung einen Kreis.

3) Von dem zweyten, Punkt wo dieser Kreis die Linie berührt, durch den Mittelpunkt eine gerade Linie nach der Peripherie gezogen.

4) Vom Endpunkt dieses Durchmessers nach dem Endpunkt der gegebenen Linie eine gerade Linie gezogen, so ist dieses die verlangte.

Zweyte Anmerkung.

Fig. 10. Weil die Peripheriewinkel auf gleichen Bögen einander gleich sind, so giebt dies ein Mittel, zu drey gegebenen Punkten, die nicht in einer geraden Linie liegen, noch mehrere zu finden die dem gleichen Kreis angehören, wie die bloße Ansicht der Fig. dem aufmerksamen Leser von selbst zeigt. Diese Aufgabe findet bey Kartenzeichnungen 2c. ihre Anwendung.

e) Ein Radius oder auch Diameter und eine Tangente miteinander verbunden.

Fig. 11. Da der Radius die kleinste Linie an die Tangente ist, so folgt daß sie rechtwinklicht mit der Tangente verbunden ist.

Der Tangentenwinkel mit einem Radius oder Durchmesser ist also ein rechter.

f) Eine Sehne und eine Tangente.

Fig. 12. Der Winkel heißt wegen der Lage seines

Scheitelpunktes, Tangentenwinkel. Durch Ziehung eines Diameters vom Berührungspunkt entsteht ein rechter Winkel, der aus einem Peripheriewinkel und dem spitzen Tangentenwinkel besteht. Die Differenz des rechten und Peripheriewinkels ist der Tangentenwinkel, folglich muß auch die Differenz ihrer Maaße das Maas des Tangentenwinkels seyn.

Das Maas des rechten Winkels ist die Hälfte des Halbkreises;

Das Maas des Peripheriewinkels ist die Hälfte des Bogens worauf er steht, folglich ihre Differenz gleich dem halben Bogen zwischen den Schenkeln des Tangentenwinkels, folglich ist dessen Hälfte auch sein Maas.

Auf ähnliche Art wird der Satz für den stumpfen Winkel erwiesen.

g) Zwey Sekanten miteinander verbunden.

Fig. 15. Diese bilden einen Winkel, dessen Scheitelpunkt ausserhalb dem Kreise liegt, und der wegen seiner Schenkel, Sekantenwinkel heißt. Um seine Größe zu finden, denkt man sich zwischen seinen Schenkeln eine Sehne, welche von dem durch die vier Durchschnittspunkte sich vorstellbaren Vierecke Diagonale ist. Diese bildet mit jedem Schenkel einen Peripheriewinkel und ein Dreyeck, wovon der eine Peripheriewinkel der Aussenwinkel ist, der folglich gleich ist den ihm gegenüber stehenden Winkeln des Dreyecks; diese sind aber der Sekantenwinkel und der andere Peripheriewinkel, folglich ist die Differenz beyder Peripheriewinkel gleich dem Sekantenwinkel, daher die Differenz der Maaße beyder Peripheriewinkel gleich dem Maas des Sekantewinkels. Das Maas beyder Peripheriewinkel ist die halbe Summe beyder Bögen zwischen den Schenkeln

des Sekantewinkels, folglich ihre halbe Differenz das Maas des Sekantewinkels, und diese Größe findet ebenfalls statt, wenn die eine Sekante oder auch alle beyde bis zur Tangente übergehen, (Fig. 14.) und folglich der Winkel im ersten Falle durch eine Sekante und eine Tangente, und im zweyten Falle durch zwey Tangenten gebildet wird. (Fig. 13.)

Historisch-pädagogische Bemerkungen.

Auf die so eben vorgetragene Weise, die räumlichen Verhältnisse soviel als möglich dem Zuhörer mit Worten, und nicht mit Buchstabenbezeichnungen zu verdeutlichen, gelang es mir, selbst ohne Hülfe von Figurenzeichnungen Hrn. v. Turk diese Kreislehrsätze verständlich zu machen. Siehe dessen Briefe über Pestalozzis Elementarbildungsmethode, 1806. Seite 288. 1ter Band.

Ja ich bin fest überzeugt, daß man für gebildete Aufmerksamkeit bey gehöriger Anschaunngs- und Sprachkraft ein Lehrbuch der Elementar-Geometrie ohne Figuren abfassen könne. Die pädagogische und wissenschaftliche Würdigung eines solchen Unternehmens gehört aber nicht hieher.

Von den geometrisch-wichtigen Verbindungen eines Kreises und zwey gerader Linien, mit Rücksicht auf die Größenverhältnisse.

Tab. XV.

Erste Combination.

Eine Sehne von einer andern in ihrer Mitte rechtwinklicht durchschnitten.

Fig. I. Verbindet man die Endpunkte dieser zwey Sehnen durch gerade Linien, so entstehen vier Dreyecke, wovon

die zwey größern und die zwey kleinern einander gleich sind, indem bey den kleinern sowohl, als bey den größern zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel, folglich auch die den gleichen Seiten gegenüberstehende Winkel einander gleich sind:

Ferner sind die Dreyecke untereinander ähnlich; denn immer zwey gegenüberstehende Dreyecke haben ausser dem rechten gegenseitig gleiche Winkel, die auf gleichen Bögen aufstehen, wie die Figur und die mit Buchstaben bezeichneten Winkel ausweisen, und da nun die kleinern Dreyecke sowohl, als die größern einander gleich sind, so müssen nicht nur die gegenüberstehenden, sondern auch die anliegenden Dreyecke einander ähnlich seyn, folglich müssen die zwey Dreyecke, welche auf der einen Seite der größern Sehnen liegen, den zwey Dreyecken auf der andern Seite gleich seyn. Da nun in diesen zwey großen Dreyecken die größere Sehne die gemeinschaftliche Seite ist, so folgt auch, daß die dieser Seite gegenüberliegende Winkel gleich sind, d. h., da diese Winkel, Peripheriewinkel sind, sie müssen das Maas des ganzen Kreises halb genommen theilen, also ein jeder ein rechter Winkel seyn; Peripheriewinkel aber die gleich sind einem rechten, stehen auf dem Diameter auf, folglich ist die halbirende Sehne Diameter des Kreises, und also auch jede Sehne, die eine andere in ihrem Mittelpunkt rechtwinklicht schneidet, Diameter.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke geht auch noch ferner hervor, daß der eine Theil des Diameters zu der halben Sehne sich verhält, wie die halbe Sehne zu dem andern Theil des Diameters, und daß folglich das Quadrat der halben Sehne gleich ist dem Rechteck, dessen Seiten die Theile des Diameters sind.

Folgerung.

Fig. II. Aus dem ersten Satz geht hervor, daß,

wenn man eine Sehne hat, man wohl die Linie, in welcher das Centrum des Kreises liegt, angeben kann, allein den Ort nicht wie Fig. 2 ausweiset; indem jede Linie Sehne von mehrern Kreise seyn kann.

Fig. III. Sind aber zwey Sehnen gegeben, die nicht parallel sind, alsdann liegt der Mittelpunkt des Kreises dem sie angehören, im Durchschnitt derjenigen rechtwinklichten Linie, welche gezogen wurde von ihrem Mitttelpunkt aus.

Fig. IV. Sind die Sehnen an ihren Endpunkten verbunden, so gilt das nämliche, und da solche Sehnen, als die gegebene Lage von drey Punkten oder als Dreyecke angesehen werden können, so folgt, daß um jedes Dreyeck, durch Errichtung rechtwinklichter Linien von der Mitte zweyer ihrer Seiten, ein Kreis beschrieben werden könne.

Fig. V. Aus dem zweyten Satz folgt die Auflösung der Aufgabe:

Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln; denn hiezu braucht man

1) die eine Seite des Rechtecks zu verlängern, um die andere Seite, so ist die Summe beyder als der Diameter anzusehen, und die einzelnen Seiten, als die Theile desselben.

2) Errichte man von dem Verbindungspunkt beyder Linien eine rechtwinklichte Linie, so liegt in dieser die Hälfte der Sehne.

3) Nun halbire man die in No. 1. erhaltene Summe der Rechtecksseiten und beschreibe

4) vom Theilungspunkt einen Kreisbogen, dessen Radius also gleich ist der halben Summe der Seiten des Rechtecks, und welcher die rechtwinklichte Linie schneidet, so

ist die rechtwinklichte Linie die Seite des gesuchten Quadrats.

Fig. VI. Auch die Aufgabe, ein Quadrat in ein ihm gleiches Rechteck zu verwandeln, wovon die eine Seite gegeben ist, läßt sich mit Hülfe dieses Satzes auflösen, wie jeder Aufmerksame von selbst finden wird. Welchen großen Vortheil dieser Satz für die Vergleichung der Flächenräume, für jede geradlinichte Figur gewährt, erhellt aus folgendem; durch die Verwandlungsaufgaben läßt sich jede Figur in ein Dreyeck verwandeln, dieses in ein ihm gleiches Rechteck, und dieses endlich in ein ihm gleiches Quadrat. Quadrate sind einander ähnlich, folglich können sie bequem verglichen werden, aus welcher Vergleichung natürlicher Weise das Verhältniß der ihnen an Inhalt gleichen Figuren hervorgeht; nimmt man daher zu Bestimmung der Flächenräume irgend ein Quadrat als 1 an, und sieht wie oft es z. B. in zwey andern enthalten ist, so hat man durch diese Zahlen das Verhältniß der Flächenräume der zwey Quadrate.

Dieser Satz ist der Fundamentalsatz der Maaslehre, die aus ihm und der früher abgehandelten Gleichheitslehre der Flächen ohne Formgleichheit, leicht und verständlich hervorgeht.

Zweyte Combination.

Zwey Tangenten in einem Punkt verbunden.

Fig. VII. Um hier die Größenverhältnisse bestimmen zu können, vereinige man den Scheitelpunkt des Winkels, und die Berührungspunkte mit dem Centrum, so entstehen zwey rechtwinklichte Dreyecke, welche die Hypothenuse gemeinschaftlich haben, und bey denen zwey Katheten einander gleich sind, als Halbmesser. Da dies für die Gleichheit der rechtwinklichten Dreyecke hinreicht, so folgt auch, daß die

zwey andern Katheten gegenseitig gleich sind, diese andern Katheten sind aber die Tangenten, folglich sind Tangenten von einem Punkt aus an einen Kreis gezogen einander gleich.

Dritte Combination.

Eine Tangente und eine Sekante von einem Punkt ausserhalb der Peripherie.

Fig. VIII. Man vereinige den Berührungspunkt mit den Verbindungspunkten der Sekante und des Kreises. Hiedurch entsteht ein Tangentenwinkel *o* gleich dem Peripheriewinkel *o* weil beyde gleiches Maas haben; der Winkel *m* ist dem großen Dreyeck und demjenigen, das zum Theil ausserhalb dem Kreise liegt, gemeinschaftlich, folglich ist das letztere dem großen ähnlich, daher haben auch die den gleichen Winkeln gegenüberstehende Seiten gleiches Verhältniß, folglich verhält sich die ganze Sekante zur Tangente wie die Tangente zu dem Stück der Sekante ausserhalb dem Kreis, folglich ist das Quadrat der Tangente gleich dem Rechteck, dessen eine Seite die ganze Sekante, und dessen kleinere Seite das Stück ausserhalb dem Kreise ist.

Vierte Combination.

Zwey Sekanten in einem Punkt ausserhalb der Periphele verbunden.

Fig. IX. Man verbinde durch Sehnen den Endpunkt der einen Secante mit dem Durchschnittspunkt der andern mit dem Kreise, so entstehen zwey Peripheriewinkel *o* die einander gleich sind, weil sie auf gleichen Bögen aufstehen. Der Sekantenwinkel *m* ist den zwey großen Dreyecken gemeinschaftlich, daher sind auch diese Dreyecke einander ähnlich, folglich verhält sich auch die große Sekante zu dem Stück der kleinen ausserhalb dem Kreise wie die

kleine Sekante zu dem Stück der großen ausserhalb dem Kreis, daher ist das Rechteck auf der großen Sekante, dessen andere Seite ihr Stück ausserhalb dem Kreise ist, gleich dem Rechteck auf der kleinen Sekante, dessen kleinere Seite ebenfalls ihr Stück ausserhalb dem Kreise ist.

Anmerkung.

Dieser Satz hilft uns die Aufgabe lösen. Ein gegebenes Rechteck in ein anderes ihm gleiches Rechteck zu verwandeln, wovon eine Seite bekannt ist, wie jeder der das bisher Vorgetragene verstanden, von selbst einsehen, und noch andere Anwendungen dieses und der vorhergehende Sätze finden wird.

Von der Ellipse.

Fig. 1. Wenn man durch den Durchmesser eines Kreises rechtwinklichte Sehnen zieht, und von diesen Sehnen zu beyden Seiten des Durchmessers, die Hälfte, den Drittel, oder überhaupt den Nten Theil, vom Durchschnittspunkt derselben und des Durchmessers aus, abschneidet, oder wenn man diese Sehnen, eben so zu beyden Seiten des Durchmessers, (Fig. 2.) von den Durchschnittspunkten aus, um das doppelte, dreyfache, oder überhaupt Nfache verlängert, und die beyden Endpunkte des Durchmessers durch eine stätige Linie verbindet, welche im ersten Fall durch die Theilungspunkte, und im zweyten durch die Endpunkte der verlängerten Sehnen geht, so entsteht eine Linie, welche Ellipse heißt. Die gezogenen Sehnen nennt man in Bezug auf den Diameter Ordinaten und den, jeder derselben, zukommenden Theil des Diameters, vom nämlichen Endpunkt gerechnet, Abscisse.

Aus dieser Construktion erhellet:

1) Daß die Ellipse, eben so wie der Kreis, eine in sich selbst zurücklaufende krumme Linie ist.

2) Wie der Kreis zwey gleiche Hälften hat, folglich

3) Durch jeden Durchmesser in zwey gleiche Theile getheilt wird.

4) Mit dem Kreis woraus sie construirt den Mittelpunkt, und einen Durchmesser gemein hat, und zwar ist dieser Durchmesser, bey der erstern Construktion der möglichst größte und bey der zweytern der möglichst kleinste in der Ellipse.

Diesen nennt man die kleine, jenen hingegen die große Axe der Ellipse, theils um so das maximum und minimum, der Durchmesser, von den dazwischen liegenden zu unterscheiden, theils aber auch, weil man nach der ersten Construktion die Ellipse als die rechtwinklichte Projection eines geneigten Kreises auf eine ebene Fläche ansehen kann, wobey folglich der gemeinschaftliche Durchmesser als die Umdrehungsaxe erscheint, denn wir haben nach beyden Ansichten folgende Proportion:

Die große Axe zur kleinen Axe, wie die Ordinate des Kreises zur Ordinate der Ellipse.

Fig. 3. Aus dieser leicht einzusehenden Proportion geht folgende Verzeichnungsweise der Ellipse aus den beyden gegebenen Axen hervor.

1) Man verzeichne zwey concentrische Kreise, so daß der Durchmesser des kleinern Kreises, gleich sey der kleinen, und der des größern, gleich der großen Axe der Ellipse.

2) Man ziehe, vom Mittelpunkt dieser beyden Kreise aus, Halbmesser zum großen Kreise.

3) Von dem Endpunkt, eines jeden dieser Halbmesser, ziehe man Ordinaten auf den als große Axe angenommenen Durchmesser.

4) Ziehe man ferner, von den Durchschnittspunkten obgedachter Halbmesser und des kleinen Kreises, Parallellinien mit der großen Axe, so schneiden diese die correspondirenden Ordinaten des großen Kreises, in den Endpunkten der, jenen Kreisordinaten, entsprechenden Ellipseordinaten. Verbindet man nun die Endpunkte der großen Axe, durch eine stätige Linie, in welcher alle auf diese Art gefundene Abschnittspunkte liegen, so entsteht die Ellipse.

Oben erwähnte Proportion ändert sich für diejenige Construktion, in welcher die Sehnen des Kreises vervielfacht wurden, in folgende:

Große Axe zur kleinen Axe, wie die Ordinaten der Ellipse zur correspondirenden Ordinate des Kreises.

Nach dieser Construktion ist daher die Ellipse als Fläche betrachtet ein eben so vielfaches des Kreises aus dem sie entstand, als die große Axe von der kleinen, oder überhaupt als eine ihrer Ordinaten, von der correspondirenden Ordinate im Kreise. Nach der erstern Construktion aber, ist sie als Fläche betrachtet ein eben so vielster Theil vom Kreise woraus sie entstand, als die kleine Axe von der großen.

Es ist also die Ellipse überhaupt ein eben so vielfaches vom Kreis der kleinen Axe als der Kreis der großen Axe von ihr. Z. B. wenn die kleine Axe = ½ der großen ist,

so ist die Ellipse dreymal größer als der kleine Kreis, und der große Kreis dreymal größer als sie selbst, denn es ist der kleine Kreis = $\frac{1}{9}$ des größern, uud die Ellipse = $\frac{1}{3}$ des letztern = $\frac{3}{9}$, ferner verhält sich die Quadrate der Ordinate in der Ellipse wie die Produkte der correspondirenden Abschnitte der Axen, (Abscissen) denn indem die Ellipsenordinaten, wie die correspondirenden Kreisordinaten sich verhalten, so müssen sich auch die Quadrate der Ellipsordinaten sich wie die Quadrate der Kreisordinaten verhalten. Letztere sind aber gedachten Rechtecken gleich, und daher muß auch das Verhältniß bey der Substitition dieser Rechtecke statt haben.

Da die kleine Axe kleiner als die große ist, so hat sie in dem Kreis, zu beyden Seiten der großen Axe und des Mittelpunkts, eine ihr gleiche Ordinate, deren Vereinigungspunkte merkwürdige Punkte in der großen Axe sind, und welche man Brennpunkte nennt.

Da diese Kreisordinate gleich der kleinen Axe ist, und beyde rechtwinklicht auf der großen Axe stehen, so muß wegen der Gleichheit, der hieraus denkbaren rechtwinklichten Dreyecke, die Entfernung des Mittelpunkts, von dem Endpunkte gedachter Ordinate, eben so groß seyn, als die Entfernung des Fußpunktes derselben, d. h. des Brennpunktes, von dem Endpunkt der kleinen Axe. (Fig. 4.) Allein da erstere Entfernung der Radius des Kreises über der großen Axe, also gleich der halben großen Axe ist, so muß auch die zweyte Entfernung dieselbe Größe haben. Weil ferner zu beyden Seiten des Mittelpunktes eine Kreisordinate existirt, welche gleich der halben kleinen Axe ist, so folgt daß die Entfernung der Endpunkte der kleinen Axe von beyden Brennpunkten zusammengenommen gleich ist der großen Axe.

Dieses merkwürdige Entfernungsverhältniß hat augenscheinlich jeder Endpunkt der großen Axe von den Brennpunkten.

Die correspondirenden Ordinate über den Brennpunkten in der Ellipse sind folglich die dritte Proportionale zwischen der großen und kleinen Axe, in dem sie durch die Proportion, große Axe zur kleinen Axe, wie die kleine Axe zu ihr findbar ist, und hat also eine beständige aus der bloßen Kenntniß der beyden Axen findbare Größe, und hat daher einen eigenen Namen, Parameter.

Die Construktionsaufgaben für die Ellipsen werden am leichtesten zu lösen seyn, wenn man sie auf die Kreise der Axen reducirt, und dann die gefundenen Linien und Winkel durch eben angeführte Proportion wieder rückwärts der Ellipse angeeignet werden.

Erste Aufgabe.

Fig. 5. An einem gegebenen Punkt in einer Ellipse eine Tangente zu ziehen.

Auflösung und Beweis.

1) Man zeichne über die große einen Kreis.

2) Ziehe durch den gegebenen Punkt eine Kreisordinate, so ist der Endpunkt derselben, der dem gegebenen Punkt, correspondirenden im Kreise.

3) Zieht man daher drittens an diesen, im Kreise gefundenen Punkt, eine Tangente für den Kreis, so wird diese hinlänglich verlängert, die Verlängerung der großen Axe in irgend einem Punkte treffen. Dieser Vereinigungspunkt muß aber auch zugleich ein Punkt der

Tangente der Ellipse seyn, denn denkt man sich den Kreis um die große Axe mit seiner Tangente so herum bewegt, daß die Kreisordinate mit der Ellipsordinate, wenn man ihre Endpunkte vereinigt denkt, ein recht ∠ Dreyeck bildet, wovon die Kreisordinate Hypothenuse und die Ellipsordinate einen Cathetus bildet, so sieht man wohl ein, daß gedachter Vereinigungspunkt, da er in der Projektionsebene selbst liegt, keine Ortsveränderung erleiden kann, also ein Punkt der Tangente der Ellipse seyn muß, und da die Richtung einer geraden Linie, durch die Lage zweyer Punkte bestimmt ist, so ziehe man

4) von diesem Punkt durch den gegebenen eine gerade Linie, so ist dieselbe die verlangte Tangente.

Zweyte Aufgabe.

Fig. 6. **Aus einem gegebenen Punkt in der Verbindung der großen Axe eine Tangente an die Ellipse zu ziehen.**

Auflösung.

1) Man zeichne einen Kreis, dessen Durchmesser die große Axe ist.

2) Ziehe von dem gegebenen Punkt an diesen Kreis eine Tangente, so ist der Berührungspunkt, der Endpunkt der Kreisordinate, die durch den Berührungspunkt der zu verzeichnenden Ellipsentangente geht. Man fälle daher:

3) Auf die große Axe, von dem gefundenen Berührungspunkt im Kreis eine Ordinate, so ist der Durchschnittspunkt derselben und der Ellipse, der Berührungspunkt

der der Kreisordinate correspondirenden Ordinate in der Ellipse. Verbindet man daher

4) diesen durchschnittenen Endpunkt mit dem gegebenen durch eine gerade Linie, so ist dieselbe die verlangte Tangente.

Dritte Aufgabe.

Fig. 7. Aus einem gegebenen Punkt in der Verlängerung der kleinen Axe, eine Tangente an die Ellipse zu ziehen.

Auflösung.

Bey dieser Augabe haben sich die Glieder der Proportion,

Die große Axe verhält sich zur kleinen Axe, wie die Ordinate des großen Kreises zur Ordinate des kleinen Kreises, offenbar in folgende gestellt:

Kleine Axe zur großen Axe, wie die Ordinate des kleinen Kreises zur Ordinate des großen Kreises.

Die Auflösung ist daher dieselbe wie in No. 2, nur mit dem Unterschied, daß in dieser der Berührungspunkt der Tangente von dem gegebenen Punkt aus an die Kreislinie der kleinen Axe gesucht, und dann dieser Punkt nach obiger Proportion, durch eine Ordinate, welche man durch ihn bis an die Ellipse zieht auf dieselbe reducirt wird.

Vierte Aufgabe.

Fig. 8. Aus einem gegebenen Punkt ausserhalb der Verlängerung einer der Axen eine Tangente an die Ellipse zu ziehen.

Auflösung.

Man suche den dem gegebenen Punkt correspondirenden Punkt für den Kreis nach der Proportion.

Die kleine Axe verhält sich zur großen, wie die rechtwinklichte Entfernung des gegebenen Punkts von der Verlängerung der großen zu der rechtwinklichten Entfernung, des diesem correspondirenden Punkts für den Kreis, d. h. räumlich:

1) Man verlängere die große Axe, und ziehe auf diese Verlängerung durch den gegebenen Punkt eine Senkrechte.

2) Ziehe man von dem gegebenen Punkt aus eine Parallele mit der großen Axe, und lasse dieselbe die kleine Axe durchschneiden.

3) Vereinige man den Endpunkt der großen Axe mit dem der kleinen durch eine gerade Linie, und ziehe,

4) von dem in No. 2 erhaltenen Durchschnittspunkt in der kleinen Axe eine Parallele mit dieser Verbindungslinie, so schneidet diese in der großen Axe, die rechtwinklichte Entfernung des, dem gegebenen Punkt entsprechenden für den Kreis ab, diesen gefundenen rechtwinklichten Abstand trage man

5) von dem Fußpunkt des in No. 1 gezogenenen Perpendikels aus, auf dieselbe, so erhält man den dem gegebenen Punkt correspondirenden für den Kreis. Zu diesem sucht man

6) die zugehörige Kreistangente, und reducire den Berührungspunkt derselben auf die Ellipse, und verbinde endlich

7) den auf diese Art erhaltenen Punkt in der Ellipse

mit dem gegebenen Punkt, so hat man die verlangte Tangente.

Fünfte Aufgabe.

Fig. 9. Der ∠ den eine Ellipsen-Tangente mit der großen Axe macht, ist bekannt, man soll die Tangente ziehen.

Auflösung.

Man trage

1) den gegebenen ∠ von irgend einem Punkte der verlangten großen Axe auf, und finde den ihm entsprechenden ∠ für den Kreis. Dieses geschieht aber, wenn man den Schenkel des aufgetragenen ∠ durch eine Parallele, in einer Entfernung gleich der kleinen Axe, durchschneidet. Durch diesen durchschnittenen Punkt ziehe man eine Senkrechte auf die Verlängerung der großen Axe gleich der halben großen Axe, so erhält man durch diesen Abschnittspunkt, und den Punkt, von welchem aus der gegebene Winkel aufgetragen wurde, die Richtung derjenigen Linie, welche mit der großen Axe den, dem gegebenen Winkel entsprechenden für den Kreis, bildet.

2) Von dem Mittelpunkt aus fälle man eine rechtwinklichte Linie, auf die gefundene Linie, und ziehe von dem Durchschnittspunkt dieser Senkrechten und des Kreises eine Parallele mit derjenigen Linie, welche mit der großen Axe den ∠ bildet, der für den Kreis dem gegebenen entspricht. Zieht man nun von dem Durchschnittspunkt dieser Parallele, und der Verlängerung der großen Axe aus, eine Tangente an die Ellipse, so wird dieselbe den Bedingungen der

Aufgabe entsprechen. Die Aufgabe hat sich also, nachdem die obbenannten Operationen vorhergegangen sind, in folgende aufgelößt.

Von einem gegebenen Punkt in der Verlängerung der großen Axe eine Tangente an die Ellipse zu zeichnen, und die vorhergehenden Operationen dienten bloß dazu, diese Punkte aus den Datis aufzufinden, und dadurch die Aufgabe auf eine frühere zurück zu führen.

Sechste Aufgabe.

Fig. 10. Es ist ein Winkel bekannt, dessen einer Schenkel Tangente einer Ellipse ist, und in dessen andern Schenkel die große Axe liegt. Ferner kennt man die große und kleine Axe, man soll den Berührungspunkt der Tangente finden.

Auflösung.

In den bisherigen Aufgaben war die Richtung der Tangente und der Ort der Ellipse blos gegeben, und sie konnten hin und her geschoben werden, hier ist ihre örtliche Lage fest bestimmt, und darf nicht verändert werden. Die Auflösung dieser Aufgabe beruht aber doch wieder auf dem, daß der gegebene ∠ auf den Kreis reducirt wird. Man errichte daher

1) von irgend einem Punkt des Schenkels in welchem die große Axe liegen soll, eine Senkrechte, mache sie gleich der halben kleine Axe, und ziehe in dieser Entfernung mit der großen Axe eine Parallele, bis dieselbe die Tangente der Ellipse berührt.

2) Ziehe man durch diesen Durchschnittspunkt einen Perpendikel auf den Schenkel des gegebenen Winkels, in welchem die große Axe liegen soll, und mache ihn

von seinem Fußpunkt aus, gleich der halben großen Are. Verbindet man nun

3) diesen Abschnittspunkt mit dem Scheitelpunkt des gegebenen ∠ durch eine gerade Linie, welche mit der Lage der großen Are einen ∠ bildet, welcher für den Kreis dem gegebenrn correspondirt, und welche daher die correspondirende Kreistangente ist.

4) Auf diese Linie errichte man eine rechtwinklichte Linie, und mache dieselbe gleich der halben großen Are, und ziehe in dieser Entfernung eine Parallele mit dem Schenkel des rechten Winkels, welcher Kreistangente seyn soll, so schneidet diese Parallele in demjenigen Schenkel, worinn die große Are liegen soll, das Centrum der Ellipse ab, welches sehr leicht einzusehen ist. Die Ellipse kann demnach nun verzeichnet werden.

5) Ziehe man von dem Centrum aus eine rechtwinklichte Linie, an die gefundene Kreistangente, und reducire den in derselben hierdurch erhaltenen Punkt, nach bekannter Art auf die gegebene Linie, welche Ellipsentangente seyn soll, so findet man den Berührungspunkt der Ellipse.

Siebente Aufgabe.

Fig. 11. Es ist ein ∠ bekannt, dessen einer Schenkel Tangente einer Ellipse seyn soll, und in dessen anderm Schenkel die kleine Are liegt. Ferner kennt man die große und kleine Are, man soll den Berührungspunkt der Ellipse finden.

Auflösung.

Diese Aufgabe wird im wesentlichen wie die vorhergehende aufgelößt, nur so, daß sich alles, was dort auf den großen Kreis reducirt wurde, hier für den Kreis der kleinen

Axe construirt werden muß, und daß sich daher alle Verhältnisse umkehren.

Die Construktion ist daher folgende:

1) Man errichte auf demjenigen Schenkel des gegebenen ∠ in welchem die kleine Axe liegen soll, eine Senkrechte, und mache sie gleich der halben großen Axe,

2) ziehe in dieser Entfernung eine Parallele mit der Lage der kleinen Axe, bis derselbe den Schenkel des ∠ schneidet, welcher Tangente seyn soll. Von diesem Durchschnittspunkt aus fälle man

3) einen Perpendikel auf diejenige Linie, in welcher die kleine Axe liegen soll, und schneide von seinem Fußpunkt aus auf demselben ein Stück ab, = der halben kleinen Axe. Verbinde man

4) Diesen Abschnittspunkt mit dem Scheitelpunkt des gegebenen ∠ durch eine gerade Linie, so erhält man eine Linie, welche die auf den Kreis der kleinen Axe reducirte gegebene Ellipsentangente ist.

5) Errichte man von irgend einem Punkt dieser Linie aus einen Perpendikel, und mache ihn gleich der kleinen halben Axe, und ziehe in dieser Entfernung, mit der gefundenen Kreistangente eine Parallele, so schneidet diese in dem Schenkel des gegebenen Winkels, worinn die kleine Axe liegen soll, den Mittelpunkt der Ellipse ab.

6) Vom Centrum aus ziehe man eine Senkrechte auf die Kreistangente und reducire den Berührungspunkt derselben, durch Verlängerung auf die Tangente der Ellipse, so wird hierdurch der Berührungspunkt der Ellipse bestimmt seyn.

Achte Aufgabe.

Fig. 12. Zu einer gegebenen Sekante den Punkt zu finden, wo sie die Ellipse schneidet.

Auflösung.

1) Auf den Endpunkt der großen Axe errichte man eine Tangente.

2) Suche das vierte Glied folgender geometrischen Proportionale: „die kleine Axe zur großen, wie das „Stück der Tangente vom Endpunkt der großen Axe, „bis zum Durchschnittspunkt der Sekante zur correspondirenden Tangente des Zirkels, welche Tangente man, wie aus der Fig. ersichtbar ist, aufträgt und dann die correspondirende Kreissekante „zieht.“

3) Aus dem Durchschnittspunkt der letztern Sekante in dem halben Kreis ziehe man eine Ordinate auf die große Axe, wo diese die gegebene Sekante trift, dort ist der verlangte Punkt.

Neunte Aufgabe.

Fig. 13. Die Entfernung eines Punkts der Ellipse vom Mittelpunkt ist gegeben, man soll den Punkt geometrisch in der Ellipse bestimmen.

Auflösung.

1) Man ziehe über die große Axe einen Halbkreis.

2) Beschreibe einen Halbkreis über die Differenz der großen und kleinen Axe.

3) Durchschneide mit der gegebenen Entfernung den letztgezogenen Halbkreis aus dem Mittelpunkt.

4) Ziehe durch den Durchschnittspunkt des Halbkreises aus dem Endpunkt der senkrechten großen Axe eine gerade Linie, und auf dieselbe eine andere gerade Linie winkelrecht nach dem Mittelpunkt der Ellipse.

5) Trage die vorletztgezogene Linie senkrecht auf den Endpunkt der großen Axe.

6) Ziehe durch den Endpunkt der letzt aufgetragenen senkrechten Linie eine Parallele, wo diese den Halbkreis trift, von dort aus ziehe man

7) eine Ordinate auf die große Axe, trage endlich

8) die gegebene Entfernung auf diese Ordinate von dem Mittelpunkt aus; so ist der Punkt, den sie bezeichnet, der verlangte in der Ellipse, weil die Proportion, große Axe zur kleinen Axe wie die Kreisordinate zur correspondirenden Ellipseordinate statt hat, wie jeder aufmerksame Leser der vorhergehenden Aufgaben leicht einsehen wird. —

Polyplanimetrie.

Die Polyplanimetrie beschäftigt sich mit den nämlichen Verhältnissen, die in mehr als einer Ebene sich befinden. Wir werden den nämlichen Gang beobachten, den wir bisher bey der Planimetrie verfolgten, folglich

A. Von der Entstehung der Flächen überhaupt und ihrer Eintheilung, mit Angabe ihrer Eigenschaften handeln.

B. Die Combinationen mit ebenen Flächen durchgehen, und die Namen und Eigenschaften nebst den daraus fließenden Constructions- und Berechnungsaufgaben, der körperlichen Räume kennen lernen.

A.

1) Wenn eine gerade Linie sich auf einer andern immer parallel mit sich fortbewegt, so entsteht eine ebene Fläche; d. h. eine Ausdehnung von zwey Dimensionen (Abmessungen,) auf welche nach allen Richtungen gerade Linien passen.

2) Wenn sich eine gerade Linie, auf einer Kreislinie, (nicht in der Ebene des Kreises) parallel mit sich fortbewegt, so entsteht die Cylinderfläche, d. h. eine Ausdehnung von zwey Dimensionen, auf der nur nach einer Richtung gerade Linien passen.

3) Wenn sich eine gerade Linie, deren einer Endpunkt unbeweglich ist, um eine Kreislinie herumbewegt, so entsteht die Kegelfläche, d. h. eine Ausdehnung von zwey Dimensionen, worauf zwar mehrere gerade Linien passen, jedoch nur solche die in dem unbeweglich angenommenen Punkt sich vereinigen.

4) Wenn ein Halbkreis sich um seinen Diameter herumbewegt, bis er in seine erste Lage zurückkommt, so entsteht die Kugelfläche, d. h. eine Ausdehnung von zwey Dimensionen worauf gar keine gerade Linien passen.

Man kann sich die Entstehung der Flächen auch noch auf andere Arten vorstellen, z. B. die Cylinderfläche: wenn sich ein Kreis parallel mit sich so bewegt, daß sein Centrum durch die Bewegung eine gerade Linie bildet.

Die Kegelfläche. Wenn sich ein Kreis parallel mit sich so bewegt, daß sein Centrum durch seine Bewegung eine gerade Linie bildet, und er selbst in einer arithmetischen Progreßion ab- oder zunimmt.

Anmerkung.

Daß sich durch die Bewegung des Kreises und der geraden Linie auch unordentlich gekrümmte Flächen bilden lassen, versteht sich von selbst, werden aber als nicht hieher gehörig, unbeachtet gelassen.

B.

Durch eine gerade Linie lassen sich unendlich viel Ebenen legen. Zur Bestimmung einer Ebene muß also wenigstens noch ein Punkt ausserhalb der Linie gegeben seyn, und da die Richtung einer geraden Linie durch zwey Punkte bestimmt ist, so ist also die Lage einer Ebene, durch die Lage dreyer Punkte, die nicht an einer Richtung liegen, völlig bestimmt.

Verbindung zweyer Ebenen.

1) Zwey Ebenen sind entweder parallel oder nicht parallel.

2) Zwey Parallelebenen sind überall gleich weit von einander entfernt, daher sind alle rechtwinklichten Linien wie auch Parallellinien zwischen ihnen gleich.

3) Sind die Ebenen nicht parallel, so können sie sich hinlänglich verlängert gedacht, berühren oder schneiden, und zwar ersteres auf doppelte Weise:

a) Jede die andere an ihrer Grenze.

b) Die eine mit einer ihrer Grenzen die andere zwischen ihren Grenzen berührend.

In jedem Falle aber haben die beyden Ebenen nur eine

Linie, und zwar eine gerade, miteinander gemein; denn da jede Ebene durch die parallele Bewegung einer geraden Linie auf einer geraden entsteht, so müßte, wenn die gemeinschaftliche Linie eine krumme seyn könnte, jede der Ebenen durch die parallele Bewegung einer geraden Linie auf derselben entstanden gedacht werden können, welches unmöglich ist. Zwey verbundene Ebenen haben also nur eine gerade Linie gemeinschaftlich. Im erstern Falle der Berührung, bilden die Ebene Flächenwinkel, und zwar

a) rechte, wenn sie sich einander weder ab noch zuneigen

b) spitze	wenn sie sich einander	zuneigen.
c) stumpfe		abneigen.

Was bey den Linienwinkeln der Scheitelpunkt war, ist hier die gemeinschaftliche Linie, welche wir Durchschnittslinie nennen wollen.

Bey den Flächenwinkeln ist wie bey den Linienwinkeln, der rechte Winkel als das unveränderliche seiner Art das Maas der übrigen.

Die Neigung zweyer Ebenen wird daher durch zwey gerade Linien bestimmt, welche von irgend einem gemeinschaftlichen Punkt der Durchschnittslinie auf beyde Ebenen, rechtwinklicht gezogen werden.

Im zweyten Falle bilden sie rechte und schiefe Flächen, nebenwinkel, und endlich im Falle des Durchschnitts rechte und schiefe Flächenscheitelwinkel. Was von den Linien Scheitel- und Nebenwinkel in Ansehung ihrer Größe gilt, gilt auch von den Flächen Neben- und Scheitelwinkeln.

Die aus vorhergehenden Sätzen über die Verbindung zweyer Ebenen leicht beweisbaren Sätze über die Verbindung einer Ebene und einer geraden Linie sind folgende:

1) Eine Linie, die mit einer Ebene verbunden ist, hat mit derselben nur einen Punkt gemeinschaftlich.

2) Eine jede Linie, die mit einer Ebene verbunden ist, bildet wenigstens mit einer in der Ebene rechte Winkel.

3) Eine Linie, welche mit zwey Linien in einer Ebene rechtwinklicht verbunden ist, macht mit allen durch den Vereinigungspunkt gehenden Linien rechte Winkel, und steht auch folglich auf der ganzen Ebene rechtwinklicht und umgekehrt.

4) Steht eine Linie rechtwinklicht auf einer Ebene, so fällt jede Linie, welche durch den Verbindungspunkt der rechtwinklichten Linie und der Ebene geht, und mit dieser aufstehenden Linie einen rechten Winkel bildet, in die Ebene.

5) Jede Linie, welche nur mit einer Linie einer Ebene rechte Winkel bildet, steht schiefwinklicht auf der Ebene.

6) Jede schiefe Linie macht einen größten und einen kleinsten Winkel mit der Ebene, welche gegenseitig Nebenwinkel sind.

7) Diejenige Linie in der Ebene, welche mit der schiefen Linie den größten und kleinsten Winkel bildet, durchschneidet rechtwinklicht diejenige Linie, womit die schiefe Linie rechte Winkel bildet.

8) Den kleinsten Winkel nennt man den Neigungswinkel der Linie gegen die Ebene.

9) Der Neigungswinkel einer schiefen Linie ist bestimmbar durch das rechtwinklichte Dreyeck, das entsteht, wenn man irgend einem Punkt der schiefen Linie, einen Perpendikel auf die Ebene gestellt sich vorstellt,

und vom Fußpunkt desselben an den Fußpunkt der schiefen Linie eine Linie sich denkt, welche wir Basis der Aufstehenden nennen wollen; dieser in der Ebene liegende Kathetus, oder diese Basis bildet mit der schiefen Linie den Neigungswinkel.

Von der geometrisch wichtigen Verbindung dreyer Ebenen.

Wenn zwey parallele Ebenen von einer dritten durchschnitten werden, so entstehen acht Flächenwinkel, deren Namen und Größeneigenschaften die nämlichen sind, wie bey den Linienwinkeln, die durch den Durchschnitt zweyer Parallellinien von einer dritten entstehen. Die Durchschnittslinien sind parallel aus leicht einzusehenden Gründen. Die Neigungswinkel liegen in einer Ebene, denn der Neigungswinkel wird durch den rechtwinklichten Durchschnitt durch die Durchschnittslinie bestimmt; da nun die Durchschnittslinien parallel sind, so muß auch die schneidende Ebene nur eine Richtung haben können. Wenn die zwey parallelen Ebenen um die Durchschnittslinie bewegt, sich einander zuneigen, so bildet ihr Durchschnitt die dritte Durchschnittslinie, welche mit den zwey vorhergehenden parallel ist. Die Durchschnittsebene bildet ein Dreyeck, dessen Winkel die Neigungswinkel sind, von den Seiten dieses Dreyecks, seinen Winkeln, dem Verhalten der Höhe zur halben Grundlinie und der Seite zur Grundlinie, gilt was bey den Dreyecken gelehrt wurde. Wenn die Durchschnittslinien zweyer Ebenen nicht parallel sind, folglich sich in einem Punkt vereinigen, so vereinigt sich auch ihre gegenseitige, d. i. die dritte Durchschnittslinie im nämlichen Vereinigungspunkte: denn der Vereinigungspunkt der zwey ersten Durchschnittslinien ist beyden Ebenen ge-

meinschaftlich. Da nun zwey sich schneidende Ebenen keine andern Punkte gemeinschaftlich haben, als die ihrer Durchschnittslinie, so muß auch dieselbe gedachten Punkt enthalten, folglich alle Durchschnittslinien in einem Punkt sich vereinigen, und die Neigungswinkel in verschiedenen Ebenen liegen. — Das dadurch entstandene nennt man körperliche Winkel, an dem sich drey Linienwinkel, drey Flächenwinkel und der Vereinigungspunkt der Durchschnittslinien befinden, den man den Scheitelpunkt des körperlichen Winkels nennen kann.

Sind die drey Ebenen rechtwinklicht miteinander verbunden, so bilden auch ihre Durchschnittslinien drey rechte Winkel; einen solchen körperlichen Winkel, nennt man rechten körperlichen Winkel. Ist die Summe der drey Linienwinkel größer als drey rechte, so nennt man einen solchen körperlichen Winkel stumpfen Körperwinkel; ist die Summe der drey Linienwinkel kleiner als drey rechte, so ist es ein spitzer Körperwinkel. Die Summe der Linienwinkel beträgt immer weniger als vier rechte, obgleich bey dem körperlichen ∠ der nämliche Unterschied statt findet, wie bey den Linienwinkeln, nämlich daß es ein- und auswärtsgehende Winkel giebt.

Der einwärts gehende Winkel ist größer als der halbe Raum, der auswärtsgehende kleiner als der halbe Raum, so wie der auswärtsgehende Linien ∠ größer ist als zwey rechte, und der auswärtsgehende kleiner als zwey rechte.

Da die Größe eines körperlichen Winkels nicht von der Größe der Ebenen, sondern von ihrer gegenseitigen Neigung, und den daraus entstandenen Karten, oder Linienwinkel abhängt, (wie die Größe eines Linienwinkels nicht von der Größe der Schenkel, sondern von ihrer Oeffnung abhängt,) so müssen wir die Bedingungen näher kennen

lernen, unter welchen ein körperlicher Winkel bestimmt ist; d. h. mit andern Worten; wir müssen die Relationen der Linien und Flächenwinkel untersuchen.

Wenn zwey Ebenen rechtwinklicht auf einer dritten stehen, und auch unter sich einen rechten Flächenwinkel bilden, so sind die dadurch entstandene Linienwinkel, rechte. Also durch die Angabe der drey Flächenwinkel die drey Linienwinkel bestimmt. Bilden diese zwey auf einer dritten rechtwinklicht aufstehenden Ebeuen, einen spitzen oder stumpfen Winkel unter sich, so hat der dadurch entstandene Körper ∠ zwey rechte und ein spitzer oder ein stumpfer Linienwinkel, wovon das Maas der letztern gleich ist dem correspondirenden Flächenwinkel. Ist nur einer ein rechter Flächenwinkel, so kann gar kein rechter Linienwinkel statt haben, also findet nur in den zwey vorhergehenden Fällen die Bestimmung der Linienwinkel aus den Flächenwinkeln statt, so viel erhellt aber daraus, daß wenn je drey und drey Stücke von den Linien und Flächenwinkeln gegeben sind, die übrigen durch Construktion sowohl als durch Berechnung zu finden sind.

Diese Verbindungen sind folgende (also auch eben so viel Constructions- und Berechnungsaufgaben.)

a) Aus den drey Linien ∠∠ die drey Flächenwinkel zu finden,

b) zwey Linienwinkel und der eingeschlossene Flächenwinkel das übrige zu finden,

c) zwey Linien und ein anliegender Flächen ∠ das fehlende zu finden,

d) ein Linien ∠ und zwey anliegende Flächenwinkel das übrige zu finden,

e) ein Linien ∠, ein anliegender und ein gegenüberliegender Flächenwinkel zu finden,

f) drey Flächenwinkel — die drey Linienwinkel zu finden.

Ehe wir an die Auflösung dieser Aufgaben uns machen, müssen wir uns über ihre Verschiedenheit von den vorhergehenden Construktionen deutliche Begriffe zu verschaffen suchen.

Da ein körperlicher Winkel drey Dimensionen besitzt, o. m. a. Worten: nicht in einer Ebene sich befindet, so erhellt, daß seine Construktion, im Gegensatze zu der vorhergehenden, Construktion im Raum, und jene, Construktion in der Ebene, genannt werden kann.

Die Data müssen also zur Findung der übrig fehlenden Stücke hinreichen, folglich letztere in ihre natürliche Verbindung mit den erstern gesetzt werden, um aus den Einsichten in die Verhältnisse der Daten zu dem zu findenden, die Wirklichkeit darstellen zu können.

Hierzu haben wir zwey Wege, denn

1) können wir uns die Flächen- und Linienwinkel, die den körperlichen Winkel im Raume bilden, auf eine Ebene zurückgelegt vorstellen, und in ihrer natürlichen Verbindung und Größe construiren, diese Zeichnungsart wollen wir die Netzartige nennen.

2) Können wir mit Hülfe der Projection zur Einsicht der Größe und Verbindungsverhältnisse gelangen.

Die Projection eines Punkts auf einer Ebene nennt man den Punkt, den die rechtwinklichte Linie, von dem Punkt auf die Fläche sich gedacht, darauf bildet. Denkt man sich zwey Ebenen, die irgend einen Winkel bilden, und von irgend einem Punkt die Projection auf beyden Ebenen, so sieht man wohl ein, daß die Lage im Raume (des Punkts) durch die bekannte Projection desselben auf zwey der Lage nach gegebenen Ebenen völlig bestimmt ist. Der Vortheile wegen im Zeichnen, hat man hiezu eine

horizontale u. verticale Ebene gewählt, und die Projection auf erster, horizontale, und auf letzterer, verticale, Projection genannt.

Der gemeine Sprachgebrauch heißt, erstere Grundriß und letztere Aufriß.

Von der Projection einer geraden Linie auf einer Projectionsebene.

Da die Richtung einer geraden Linie durch die Lage zweyer Punkte bestimmt ist, so muß auch ihre Projecion durch die Projection zweyer Punkte bestimmt seyn, und daher durch die Projection ihrer Endpunkte die Größe und Richtung der Projection der ganzen Linie.

Die Projectionslinien als rechtwinklicht auf der Projectionsebene sind parallel, ihre Entfernung bildet mit der Differenz ihre Länge und der zu projectirenden Linie ein rechtwinklichtes Dreyeck, dessen einer Kathetus (die Entfernung der Projectionslinie) die Projection selbst ist, und dessen anderer Kathetus die Differenz der Projectionslinie abgiebt.

Die Größe der Projectionen nimmt zu, wenn die Differenz der Projectionslinie abnimmt (im Verhältnisse der sin: Cos.) (die Linie als Radius ansehend.) Ist daher die Differenz der Projectionslinie gleich Null, so hat die Linie eine parallele Lage mit der Projectionsebene, und die Projection hat dieselbe Größe und Richtung wie die Linie selbst. Hat aber die Differenz ihr Maximum erlangt, so ist die Linie rechtwinklicht auf der Ebene, und ihre Projection ist ein Punkt.

Die Projection einer Linie kann also alle mögliche zwischen Null und ihrer Größe fallenden Werthe haben, d. h. von einem

Punkt alle Uebergänge bis zu der Länge der Linie selbst machen.

Stellt man sich eine gerade Linie die rechtwinklicht auf der Projectionsebene steht, um ihren Fußpunkt in einer rechtwinklichten Ebene sich bewegt vor, so beschreibt sie, bis sie in die Projectionsebene selbst fällt, einen Quadranten; die Richtungen aller in diesem Quadrant möglichen Projectionen liegen in der Durchschnittslinie dieses Quadranten mit der Projectionsebene.

Von der Projection einer geraden Linie auf beyde Projectionsebenen.

Wie oben schon erwähnt worden, ist die eine, eine verticale, die andre eine horizontale Ebene. Die Durchschnittslinien beyder wollen wir Grundlinien nennen, und mit G L bezeichnen.

Die Projectionslinien eines Punktes, stehen, wenn man sie auf die mit ihr parallele Ebene trägt, rechtwinklicht auf G L und zwar von einem Punkt ausgehend. Da man nun in der Zeichnung beyde Projectionsebenen sich in eine Ebene zurückgelegt vorstellt, so sieht man leicht ein, daß die oben erwähnten, auf die Projectionsebenen getragene Projectionslinien, eine einzige gerade, die G L rechtwinklich schneidende Linie bilden; derjenige Theil der Linie der in der verticalen Ebene liegt, zeigt die Höhe des Punkts über der horizontalen Ebene, und der welcher in der horizontalen Ebene liegt, die Entfernung des Punkts von der verticalen Fläche an.

Die Projectionen der mit G L parallelen Linien, sind mit G L in beyden Projectionsebenen parallel, und vermög des vorhergehenden der Linie an Richtung und Größe selbst gleich.

Liegt die Linie in einer, mit der horizontalen Ebene, nicht aber mit G L parallelen Ebene, so ist die horizontale Projection an Richtung und Größe der Linie selbst gleich; die verticale Projection aber eine Horizontallinie, kürzer als die Linie selbst, denn da sie in einer Horizontalebene liegen soll, so sind die Projectionslinien, Horizontallinien, und ihre Entfernung die Projection, die als Kathetus kleiner als die Hypothenuse, d. i. die zu projectirende Linie ist.

Liegt die zu projectirende Linie in einer parallelen Ebene mit der verticalen Ebene, nicht aber mit G L, so ist ihre verticale Projection an Richtung und Größe = der Linie, und ihre Horizontalprojection eine Horizontallinie kürzer als die Linie selbst, aus ähnlichen Gründen wie oben.

Liegt die zu projectirende Linie in einer Ebene die G L rechtwinklicht schneidet, so hat der Grundriß und Aufriß eine rechtwinklichte Lage zu G L.

Liegt eine Linie in einer parallelen Ebene mit einer Projectionsebene, und ist zugleich rechtwinklicht gegen die andere Projectionsebene gerichtet, so ist die Projection auf letztere ein Punkt, auf erstere eine Linie, an Richtung und Größe = der Linie selbst.

Hat endlich die Linie eine solche Lage, daß sie keinen der vorigen Fälle begreift, so ist sie in beyden Projectionsebenen, an Richtung und Größe der Linie ungleich.

Projectionen zweyer gerader Linien.

Was von den Projectionen einer geraden Linie galt, muß auch von den Projectionen zweyer gerader Linien, jede einzeln genommen, gelten, der einzige Unterschied kann nur davon herrühren, daß die Linien in ihrer Verbindung vom berührten Falle verschiedene Lagen haben können; die zu projectirenden Linien können parallel oder nicht parallel seyn.

Die Projectionen zweyer parallelen Linien, die parallel mit der verticalen Projectionsebene und mit der G L sind, sind auf der verticalen Projectionsebene an Richtung und Größe der Linie gleich, und bilden auf der Horizontal-Projectionsebene eine einzige gerade Linie, an Richtung = der Linien-Richtung, und an Entfernung = der Projectionsentfernung ihrer äußersten Endpunkte; liegen die Parallelen zwar in einer Verticalebene, aber nicht parallel mit der Grundlinie, so gilt in diesem Falle von der Verticalprojection das nämliche, wie im vorhergehenden Falle, nur wird die Horizontalprojection eine andre Richtung haben als die Linie selbst.

Liegen die Parallellinien zwar parallel mit G L, aber in einer geneigten Ebene, so sind beyde Projectionen an Größe und Richtung gegenseitig gleich, und nur die gegenseitige Entfernung verkürzt.

Sind endlich die Linien nicht in einer parallelen Ebene mit G L, und auch in einer geneigten Ebene, so sind die beyden Projectionen an Richtung und Größe und gegenseitiger Entfernung ungleich. Bilden die Linien einen rechten Winkel, dessen einer Schenkel parallel mit G L liegt, so bildet die horizontale und verticale Projection in jeder Richtung des andern Schenkels, einen rechten Winkel, nur den Fall ausgenommen, wenn der Schenkel horizontal oder vertical ist, wo dann nur in einer Projectionsebene ein rechter Winkel entsteht, und auf der andern Projectionsebene nur eine Linie.

Dieser Satz ist ein Fundamentalsatz der Géometrie descriptive, der in allen denjenigen Fällen seine Anwendung findet, wo durch Umdrehung einer Fläche Größen und Verbindungsverhältnisse erkannt werden.

Bey spitzen und stumpfen Winkeln, wenn sie nicht in einer rechtwinklichten oder parallel mit der Projectionsebene

laufenden Ebene sich befinden, (in welchem Falle er ein ihm = spitzer oder stumpfer Winkel ist,) sind die Projectionen der Schenkel, ihm an Richtung und Größe ungleich.

Liegen die Linien in verschiedenen Ebenen, so gilt von jeder einzeln, was von der Projection einer geraden Linie gelehrt wurde, folglich lassen sich die gegenseitigen Beziehungen von selbst leicht finden.

Das bisher gesagte reicht zur Projection eines Körperwinkels hin, und enthält die Grundprinzipien der sogenannten Géometrie descriptive: wovon wir von Herrn Major Tulla einst eine ausführliche wissenschaftliche Darstellung zu erwarten haben, sobald seine praktischen Arbeiten ihm hiezu die nöthige Muse gewähren. Für Lehrer bemerke ich schließlich noch, daß die vorgetragenen Sätze der Polyplanimetrie am besten durch körperliche Darstellungen veranschaulicht und bewiesen werden, so wie mich auch die Erfahrung lehrte, daß den jungen Leuten die Verfertigung derselben bey gehöriger Anleitung großes Vergnügen verursachen.

Systematischer Ueberblick

des

bisher Dargestellten,

vermitttelst allgemeiner und besondern Bemerkungen über die Tabellen, (Kupfertafeln,) deren Inhalt, Construktionsweise *c.* betreffend.

Allgemeine Bemerkung über die Tabellen.

Der Hauptzweck ihrer Anordnung ist, bildlich darzustellen, wie durch Construktion nach einem systematischen Zusammenhang der menschliche Geist zur Lehre über räumliche Verhältnisse geleitet werden könne.

Diesem ihrem Zwecke gemäs mußten sie in einer lückenlosen Reihenfolge, die Construktionen und Aufgaben enthalten, und zwar so, daß man durch die bloße Ansicht bey den Construktionen die gegebenen Elemente von den gefundenen und bey den Aufgaben die gegebenen Daten von den durch die Auflösung gefundenen unterscheiden konnte, daher sind auch

1) In allen Tabellen die gegebenen Elemente, Daten und Figuren, woraus andere construirt wurden, stark gezeichnet.

2) Die Hülfslinien nur punktirt angegeben.

3) Die gefundenen Linien, Winkel, Figuren zwar ausgezogen, aber schwächer als die gegebenen.

Auch mußte, des leichtern Ueberblicks wegen, jede einzelne Tabelle so geordnet werden, daß jede ein Ganzes für sich enthält, so daß jede entweder eine bestimmte Lehre, Construktion, Gattung von Aufgaben, oder Vergleichung anschaulich macht.

Tab. I.

Sie liefert die bildliche Darstellung von den Produkten der Bewegung eines Punktes in einer ebnen Fläche, und zwar

Abtheil. A. Die möglichen Bewegungsweisen ohne alle Beziehung. Der Text benennt, klassifizirt sie, und sucht ihre Eigenschaften ꝛc. auf, was in jeder Abtheilung geschieht.

Abtheil. B. Die möglichen Näherungs- und Entfernungsweisen zu einem gegebenen Punkt. Der zu bewegende Punkt ist mit einem bloßen a bezeichnet, aber der andre mit a'

Abtheil. Fig. a. Die Produkte der geraden Bewegung in Beziehung auf eine gegebene gerade Linie, und zwar, wenn der zu bewegende Punkt an einem der Endpunkte liegt.

Abtheil. Fig. b. Die Produkte der geraden Bewegung in Beziehung auf eine gegebene gerade Linie, wenn der zu bewegende Punkt innerhalb der gegebenen Linie liegt.

Abtheil. Fig. c. Die Produkte der geraden Bewegung in Beziehung auf eine gegebene gerade Linie, wenn der zu bewegende Punkt in der Verlängerung der gegebeuen Linie liegt.

Abtheil. Fig. d. Die Produkte der geraden Bewegung in Beziehung auf eine gegebene gerade Linie, wenn der zu bewegende Punkt außerhalb der Linie und ihrer Verlängerung liegt.

Tab. II.

Sie enthält die geometrisch-wichtigen Verbindungen von drey geraden Linien, in so fern sie die Lehre der Parallelen, Construktion der Dreyecke, nebst deren Abtheilungen begründen, und zur Auffindung der Eigenschaft der Dreyecke aus ihrer bloßen Construktion behülflich sind.

Tab. III.

Sie liefert die bildliche Darstellung von der Lehre der Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreyecke. Die linke Hälfte hat die Lehre der Gleichheit, und die rechte die Lehre der Aehnlichkeit zu ihrem Gegenstande. Das obere Paar, in jeder Hälfte, sind gleichseitige Dreyecke; das darauf folgende Paar ebenfalls in jeder Hälfte gleichschenklich-rechtwinklichte, das mittlere Paar gleichschenklich-spitzwinklichte, das folgende gleichschenklich-stumpfwinklichte, und das letzte endlich ungleichseitige Dreyecke.

In beyden Hälften haben die Seiten der Dreyecke in jeder wagrechten Reihe gleiche Abweichungswinkel, deßwegen sind die rechtwinklichten Linien, als Hülfslinien zu dieser Anschauung, punktirt angegeben

Der Grund der Reihenfolge dieser Dreyecksarten ist folgender: von der bestimmtesten Form, wie gleichseitige und gleichschenklicht-rechtwinklichte Dreyecke zu den weniger bestimmten, wie die gleichschenklicht-spitz- und stumpfwinklichten Dreyecke, und von ihnen zu den unbestimmten ungleichseitigen übergehend, sollte durch die bloße Anschauung, Induktionsweise, die Lehre der Gleichheit und Aehnlichkeit vorbereitet werden, um den schärfern Beweisen sicherern und schnellern Eingang zu verschaffen.

Tab. IV.

Sie enthält die Aufgaben über die Verzeichnung der Linien, von bestimmter Richtung gegen eine gegebene, und zwar

1) von rechtwinklichter,
2) schiefwinklichter,
3) paralleler Lage.

Fig. 1. ist die Aufgabe: aus dem gegebenen Mittelpunkt *a* einer gegebenen Linie, eine rechtwinklichte Linie zu ziehen.

Fig. 2. ist die nämliche Aufgabe, nur daß der Punkt *a* nicht in der Mitte, aber doch noch zwischen den Endpunkten liegt.

Fig. 3, 4, 5, enthalten die Aufgabe: wenn der Punkt a der Endpunkt der gegebenen Linie ist; Fig. 3. dient für den Fall, in welchem sich die gegebene Linie verlängern läßt; Fig. 4. ist die Construktion zur Auffindung der Auflösung für deu Fall, in welchem sich die Linie nicht verlängern läßt; und Fig. 5. enthält die Ausführung dieses letzten Falls.

Fig. 6. enthält die Aufgabe: von einem gegebenen Punkt *a* der ausserhalb der gegeben Linien liegt, eine senkrechte Linie zu ziehen.

Fig. 7 u. 8. enthalten die nämlichen Aufgaben durch Linial und Winkelmaas aufgelößt.

Fig. 9 u. 10. enthalten die Aufgabe: eine Linie mit einer andern gegebenen so zu verbinden, wie zwey andere gegebene verbunden sind; Fig. 9. enthält die gegebene verbundene Linie, und in Fig. 10. ist die schwache Linie, die eben so, d. h. unter gleichem $\angle$ gegen die gegebene stark construirte; ferner enthält Fig. 9. die Aufgabe: zu zwey gegebenen verbundenen Linien eine andere vom Scheitelpunkt aus zu ziehen, die nur die halbe Neigung zu jeder hat, d. h. mit andern Worten, sie enthält die Aufgabe den Winkel zu halbiren.

Fig. 11. enthält die aus dem Begriff der gleichlaufenden Linien selbst geschöpfte Auflösung der Aufgabe: durch einen gegebenen Punkt *a* eine Parallele zu ziehen mit einer andern gegebenen Linie.

Fig. 12, 13, 14. enthalten die nämlichen Aufgaben aufgelößt durch die Eigenschaften der innern Wechselwinkel, der äußern Wechselwinkel und der Gegenwinkel.

Fig. 15 u. 16. enthalten diese Auflösung durch Linial und Winkelmaas.

Tab. V.

Sie enthält die Aufgaben über die Verzeichnung gleicher Dreyecke, und zwar 9.

Die drey ersten Fig. 1, 2, 3. aus Daten woraus die Gleichheitslehre gefolgert wurde; die drey folgenden Fig. 4, 5, 6. aus Daten die aus der Gleichheitslehre und unmittelbar als gleich gefolgert wurden; und die drey letzten Fig. 7, 8, 9. aus Daten die blos aus Zusammensetzung und Trennung mittelbar als gleich in gleichen Dreyecken erkannt wurden.

Ihr Inhalt ist also in Beziehung auf die Arten der Aufgaben erschöpfend, und die Anzahl zur Anleitung hinreichend. Die ganz stark bezeichneten Dreyecke sind diejenigen, aus welchen die Data construirt wurden, welche wir Muster-Dreyecke nennen wollen; unmitelbar unter ihnen oder wenigstens dicht neben ihnen befinden sich, ebenfalls stark bezeichnet, die herausconstruirten Data und jedesmal unter den Muster-Dreyecken, ausser bey dem letzten, wegen des großen Raums dessen es bedurfte, das zu findende Dreyeck.

In den gefundenen Dreyecken sind die Data, wenn's Linien sind, stark bezeichnet, die Winkel mit dem nämlichen Buchstaben, wie in dem Muster-Dreyeck, so daß blos aus dem gefundenen Dreyeck die Data erkannt werden können.

Weil die vierte und achte Aufgabe zwey Fälle hat, so gab's statt 18, 20 Figuren.

Tab. VI.

Sie hat zu ihrem Gegenstand die Aufgaben über die Verzeichnung ähnlicher Dreyecke, nebst den Theilungsaufgaben der Linien.

Fig. 1. Das stark bezeichnete Dreyeck ist das Musterdreyeck für die rechtwinklicht unter ihm sich befindenden Dreyecke. Die Seiten desselben sind deßwegen eingetheilt, um ihr Verhältniß leichter zu erkennen; sie sind nach der obern großen wagrechten Linie gemessen. Die untere wagrechte Linie ist $\frac{3}{4}$ der obern, folgl. auch jeder Theil $\frac{3}{4}$ eines Theils der ersten Linie. Diese zweyte wagrechte Linie dient, um das Verhältniß schnell finden zu können. Zur Auflösung ist sie eigentlich nicht durchaus nothwendig, allein hier wurde sie angenommen, damit die aus den Daten gefundenen Dreyecke kein unangenehmes Größenverhältniß erhielten.

Die Winkelbeziehung, in Rücksicht auf die Daten, ist die nämliche, wie die im vorhergehenden Blatte. Um aber auf das Linienverhältniß als Datum aus den bloßen verzeichneten Figuren schon zu erkennen, so sind diejenigen Linien, deren Verhältniß angegeben worden, darnach eingetheilt.

Fig. 5. dient zur Anschauung, daß in einem stumpfwinklichten Dreyeck das Angeben eines Winkels nebst dem Verhältniß der zwey Abschnitte nicht hinreiche, für Verzeichnung eines ähnlichen Dreyecks, weil der Fußpunkt der Höhenlinie, wenn eine der kleinern Seiten als Grundlinie angenommen wird, nicht in dieselbe, sondern in ihre Verlängerung kommt, deßwegen, ausser jenen Daten, bestimmt seyn müsse, ob die große Seite oder eine der kleinen Grundlinie ist.

Fig. 6. ist das Musterdreyeck für die unter ihm befindlichen zwey Dreyecke, deren Daten aus der bloßen Anschauung kennbar sind.

Fig. 9. ist das Musterdreyeck für die unter ihm befindenden drey Figuren, deren Datenbezeichnung ebenfalls die nämliche ist, wie die der vorhergehenden.

Fig. 13. dient zur Aufgabe, eine gegebene Linie in zwey gleiche Theile zu theilen.

Fig. 14. lehrt, eine Linie in mehrere gleiche Theile zu theilen

Fig. 15. eine Linie in verhältnißmäßige Theile zu theilen.

Fig. 16. zu drey gegebenen Linien eine vierte geometrische Proportionale zu finden.

Fig. 17. ist ein geometrischer Maasstab.

Tab. VII.

Die zwey obern wagrechten Reihen bilden den Uebergang von den Dreyecken zu den Vierecken, und zwar so, daß die viereckigten Formen, die unter ihnen sich befinden, erschöpfend sind. Die starken Linien zeigen an das gegebene Element; die zwey andern, nach dem im Text angezeigten Gange aufsehend, dienen blos dazu, um durch ihre Vergleichung mit der gegebenen Linie die Vierecke unter ihnen entstehen zu sehen und klassificiren, darnach benennen, und als Formen vergleichen zu können.

Tab. VIII.

In ihr finden wir,

1) Eine Reihe Quadrate.
2) Eine Reihe Rechtecke.
3) Zwey Reihen Rhomben, und
4) Drey Reihen Rhomboiden.

Eine jede dieser Reihen enthält drey der genannten Figuren.

Ihr Zweck ist die Fortsetzung der Vergleichung der Parallelogramme als Formen, und zwar vermittelst der Diagonalen. In der ersten, zweyten, dritten und fünften Reihe wurden in den obern Figuren die rechtsteigenden Diagonalen, in den mittlern die linkssteigenden, und in den untern beyde zugleich gezogen, um bey den rechtwinklichten die Gleichheit, und bey den schiefwinklichten die Ungleichheit der Diagonalen, ferner, um bey den gleichseitigen den rechtwinklichten, und bey den ungleichseitigen den schiefwinklichten Durchschnitt anschaulich zu machen.

Die vierte, sechste und siebente Reihe Parallelogramme haben zu ihrem Gegenstand die Vergleichungen der kleinen Diagonale mit den Seiten, nach der Verschiedenheit der Winkel.

Die zwey untern wagrechten Reihen Figuren haben zu ihrem Gegenstand die räumliche Vergleichung der Formen als Größe; die obere Reihe die Vergleichung der Parallelogramme, die untere, als Folge, die Vergleichung der Dreyecke.

Die erste Figur von der linken Seite an gezählt soll anschaulich machen den Satz, Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind einander gleich, und in der Reihe der Dreyecke, die ihr correspondirende Figur,

die Anwendung des Satzes auf Dreyecke, als Hälften der Parallelogramme.

Die zweyte Figur sowohl in der obern als untern Reihe soll anschaulich machen, daß Parallelogramme und Dreyecke von gleichen Grundlinien aber ungleichen Höhen sich verhalten wie ihre Höhen.

Die darauf folgende Figur, daß Parallelogramme und Dreyecke von gleichen Höhen aber ungleichen Grundlinien sich verhalten, wie ihre Grundlinien. In beyden Figuren ist die Theilung $\frac{1}{3}$.

Die zwey folgenden Figuren sollen anschaulich machen, daß Parallelogramme und Dreyecke einander gleich sind, wenn sich die Höhen umgekehrt verhalten wie die Grundlinien. In der ersten verhalten sich die Grundlinien wie 1 : 2, und die Höhen wie 2 : 1, und in der zweyten verhalten sich die Grundlinien wie 2 : 3, und die Höhen wie 3 : 2.

In der letzten Figur soll anschaulich gemacht werden, daß Parallelogramme und Dreyecke von ungleichen Grundlinien und ungleichen Höhen in zusammengesetztem Verhältniß ihrer Höhen und Grundlinien stehen, oder mit andern Worten, daß sie sich verhalten wie die Produkte ihrer Höhen und Grundlinien.

Tab. IX.

Sie enthält den Pythagoräischen Lehrsatz. **Fig. 1.** soll ihn anschaulich machen vermittelst der Zahl um dem schärfern Beweis, wozu Fig. 2. dient, leichtern Eingang zu verschaffen. In Fig. 3. ist er angewandt auf ein gleichschenklich-rechtwinklich Dreyeck, wodurch also klar wird, daß das Quadrat der Hypothenuse desselben gleich ist dem doppelten Quadrat eines ihrer Katheten, daß folglich die Hypothenuse zu einem Katheten sich verhält wie Quadratwurzel aus 2 zu 1. In Fig. 4. ist er angewandt auf ein gleichseitiges Dreyeck, um das Verhältniß, in dieser zweyten unwandelbaren Dreyecksform, der Grundlinie zur Höhe aufzufinden und anschaulich zu machen. Man sieht daß das Verhältniß der Seite zur Höhenlinie dem von $2 : \sqrt{\frac{2}{3}}$ gleich ist. In Fig. 3. war das Verhältniß der Grundlinie zur Höhe bekannt, und das der Seiten unbekannt; hier im gleichseitigen Dreyeck ist das der Seiten bekannt, folglich war das Verhältniß einer Seite zur Höhe das zu findende. Fig. 5 und 6. enthalten die Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes auf stumpf- und spitzwinklichte Dreyecke; um auch in diesen Gattungen von Dreyecken das Verhältniß der Seiten ausfindig zu machen durch Flächenräume. Bey Fig. 5. sieht man daß den Summen der Quadrate der Schenkel des stumpfen Winkels noch zwey Rechtecke zugesetzt, und bey Fig. 6. abgenommen werden müssen.

Tab. X.

Sie hat die Construktion der Parallelogramme aus gegebenen Daten zu ihrem Gegenstande. Die erste senkrechte Reihe Figuren enthält die Musterparallelogramme mit der Verzeichnung der in den Aufgaben gebrauchten Daten. Die Aufgaben sind wieder geordnet wie die der Dreyecke, eben so verhält es sich mit dem Orte der Daten und der Stärke ihrer Bezeichnung. In der ersten wagrechten Reihe befinden sich folglich, die erste Figur linkerhand abgerechnet, die drey Aufgaben der Quadrate, über ihnen sind die Data angemerkt, deren Richtigkeit man aus der Musterfigur selbst ersehen kann, und welche auch in der gefundenen Figur stark bezeichnet wurden. Eben so verhält es sich in der zweyten waagrechten Reihe mit den Aufgaben über die Rechtecke; in der dritten mit den Aufgaben über die Rhomben, und in der vierten endlich mit den Aufgaben über die Rhomboiden.

Tab. XI.

Sie hat zu ihrem Gegenstande die Aufgaben über die Verwandlung. In

Fig. 1. ist ein Rechteck in eine Rhomboide mit bestimmtem Winkel verwandelt. In

Fig. 2. ein Rechteck in ein Paralleltrapez mit bekanntem Winkel; in

Fig. 3. ein Dreyeck in ein gleichschenklichtes; in

Fig. 4 ein Rechteck in ein Dreyeck; in

Fig. 5. ein Dreyeck in ein Rechteck; in

Fig. 6. irgend ein Viereck in ein Dreyeck; in

Fig. 7 und 8. ein Fünfeck in ein Parallelogramm von bestimmtem Winkel; in Fig. 7. wird dies Fünfeck zuerst in ein Dreyeck verwandelt, und in Fig. 8. dies Dreyeck in das Parallelogramm von bestimmtem Winkel; in Fig. 7. war das Dreyeck das zu findende, daher seine Seiten schwächer bezeichnet als die des Fünfeckes; Fig. 8. ist das Dreyeck das gegebene, und das Parallelogramm das zu findende, daher die Seiten des Dreyecks hier stärker bezeichnet sind, als die des Parallelogramms.

Fig. 9. enthält die Verwandlung eines Sechsecks in ein Viereck.

Tab. XII.

Sie enthält die Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes auf den Algorithmus der Quadrate.

Fig. 1. enthält die Aufgaben der Verwandlung zweyer gegebenen Quadrate in ein ihnen gleiches an Inhalt. Im Text ist an diese bildliche Vorstellung der Addition zweyer Quadrate auch die von mehrern und die von gleichen angeknüpft.

Fig. 2 u. 3. enthalten die Subtraction und Division der Quadrate; die untere Reihe Figuren macht anschaulich, daß das Verhältniß der Quadrate auf den Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks, von ähnlichen Figuren überhaupt gelte. Der Text erweitert, durch diese Anschauung veranlaßt, den Algorithmus der Quadrate zum Algorithmus ähnlicher Figuren überhaupt.

Tab. XIII.

Sie enthält die Aufgaben von Theilungen.

Fig. 1 u. 2. lehren, ein Dreyeck in zwey Theile zu theilen von einer Ecke aus. Fig. 1. in gleiche, Fig. 2. in verhältnißmäßige.

Fig. 3 u. 4. lehren, ein Dreyeck in zwey Theile zu theilen von einem Punkt aus, der innerhalb einer Seite liegt, und zwar Fig. 3. in gleiche, und Fig. 4. in verhältnißmäßige Theile.

Fig. 5 u. 6. lehren, ein Dreyeck in zwey Theile zu theilen von einem innerhalb dem Dreyeck liegenden Punkt aus, und zwar Fig. 5. in gleiche, Fig. 6. in verhältnißmäßige Theile.

Fig. 7 u. 8. lehren, ein Dreyeck in zwey Theile zu theilen durch eine Linie parallel mit irgend einer Seite, und zwar bey Fig. 7. in gleiche, und Fig. 8. in verhältnißmäßige Theile.

Im Text ist die Anwendung dieser Auflösung angedeutet auf denjenigen Fall, wo die Theilungslinie mit irgend einer andern gegebenen Linie parallel laufen soll.

Fig. 9 u. 10. lehren, ein Parallelogramm in zwey gleiche Theile zu theilen, und zwar Fig. 9. durch eine Linie von willkührlicher Lage, und Fig. 10. durch eine Linie von gegebener Lage.

Fig. 11. lehrt, ein Paralleltrapez in zwey gleiche Theile zu theilen durch eine Linie parallel mit seinen parallelen Seiten.

Fig. 12. lehrt, irgend eine Figur in zwey gleiche Theile zu theilen, wovon der eine Theil dem Ganzen ähnlich sey.

Tab. XIV.

Sie enthält

1) Die Construktion des Zirkels Fig. 1.

2) Die geometrisch-wichtigen Verbindungen eines Zirkels mit einer Linie.

Fig. 2. stellt alle auf einmal dar, weil sonst zu viele Figuren hätten gezeichnet werden müssen, und doch der Zweck, die Verschiedenheit der Lage der geraden Linien, ihrer Größe, ihren Namen kennen zu lernen und sie miteinander zu vergleichen, erreicht wird.

3) Die geometrisch-wichtigen Verbindungen eines Kreises und zweyer geraden Linien.

Fig. 3. stellt die Verbindung zweyer Radien und eines Kreises vor. Durch sie lernen wir die Sektoren kennen, und die Centriwinkel, nebst ihrem Maas, gleich dem Bogen, worauf sie stehen.

Fig. 4, 5, 6. lehrt uns die Peripheriewinkel kennen, und ihr Maas bestimmen, gleich dem halben Bogen worauf sie stehen, vom leichtern zum schwerern übergehend rücksichtlich der Lage der Schenkel des Winkels.

Fig. 7. lehrt uns die durch den Durchschnitt zweyer Sehnen entstandene Winkel kennen, und ihre Größe bestimmen, gleich der Summe beyder Bögen zwischen den Schenkeln.

Fig. 8. zeigt anschaulich, als Folge des Lehrsatzes über die Peripheriewinkel, daß alle Peripheriewinkel über dem Diameter rechte Winkel, und über jeder andere Sehne spitze oder stumpfe Winkel sind, jenachdem ihr Scheitelpunkt im größern oder kleinern Abschnitt liegt.

Fig. 9. enthält eine Anwendung des vorhergehenden, auf die Aufgabe: am Ende einer gegebenen Linie, die nicht verlängert werden kann, eine rechtwinklichte Linie zu errichten.

Fig. 10. enthält die Anwendung auf die Aufgabe: zu drey gegebenen Punkten, die nicht in einer Linie liegen, noch mehrere zu finden die im nämlichen Kreise liegen, ohne einen Kreis zu beschreiben.

Der Kreis ist hier blos als Anschauungsmittel anzusehen.

Fig. 11 u. 12. lehren uns Tangentenwinkel kennen, und ihre Größe zu bestimmen, gleich dem halben Bogen zwischen ihren Schenkeln.

Fig. 13, 14 u. 15. lehren uns die Winkel ausserhalb dem Kreis, d. i. Sekantenwinkel kennen, und ihre Größe bestimmen, gleich der halben Differenz der Bögen zwischen den Schenkeln.

Tab. XV.

Sie enthält die geometrisch = wichtigen Verbindungen eines Kreises und zweyer gerader Linien mit Rücksicht auf die Größenverhältnisse der letztern.

Fig. 1. enthält die Verbindung einer Sehne mit einer andern die sie in ihrer Mitte rechtwinklicht schneidet. Hieran wird gezeigt

1) daß die letztere Diameter ist, und

2) daß das Quadrat der halben Sehne gleich ist dem Rechteck der zwey Theile des Diameters.

Aus dem ersten Satze, als Folgerung kommt

Fig. 2. die anschaulich macht, daß zwar die Linie, in welcher der Mittelpunkt liegt, zu einer Sehne gefunden werden könne, aber nicht der Ort selbst;

Fig. 3 u. 4. sollen anschaulich machen, daß zu zwey gegebenen Sehnen des Kreises, die nicht parallel sind, das Centrum und der Kreis selbst gefunden werden könne.

Fig. 5. ist eine Erweiterung der Folgerung, auf Dreyecke angewandt; zeigt also an daß um jedes Dreyeck ein Kreis beschrieben werden könne.

Fig. 6. lehrt, als Anwendung des zweyten, auf der ersten Figur sich ergebenden Satzes, die Aufgabe auflösen, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln. Hier ist das Rechteck das gegebene, folglich stark bezeichnet. Das Quadrat das zu findende, also schwächer ausgezogen, und die Kreisbögen, als Hülfslinien punktirt. Der Text knüpft als Folge an diesen Satz den, daß sich die Quadrate zweyer Sehnen verhalten wie die Abschnitte, die die senkrechten Linien auf dem Diameter bilden.

der von dem Verbindungspunkt der Sehnen gezogen wurde; die Abschnitte vom Verbindungspunkt angerechnet: hieraus ergiebt sich eine zweyte Multiplikations- und Divisionsmethode der Quadrate und ähnlicher Figuren in ähnliche überhaupt.

Fig. 7. zeigt an, daß Tangenten von einem Punkt aus an einen Kreis gezogen einander gleich sind.

Fig. 8. dient zur Bestimmung des Verhältnisses einer Tangente zur Sekante, durch Flächenräume ausgedrückt. Sie macht anschaulich, daß das Quadrat der Tangente gleich ist, dem Rechteck auf der Sekante, dessen kleinere Seite gleich ist ihrem Stück ausserhalb dem Kreise.

Fig. 9. enthält die Verbindung zweyer Sekanten mit einem Kreis: sie macht anschaulich, daß das auf der größern Sekante verzeichnete Rechteck, dessen kleinere Seite ihrem Stück ausserhalb dem Kreise *gleich ist*, an Inhalt dem auf der kleinern Sekante verzeichneten Rechtecke, dessen kleinere Seite ebenfalls ihr Stück ausserhalb dem Kreise ist, gleichkommt, oder mit andern Worten: daß die ganzen Sekanten sich umgekehrt verhalten, wie ihre Stücke ausserhalb dem Kreise.

Tab. XVI et XVII.

Da die Ellypse so viele Aehnlichkeit mit dem Kreise hat, so daß man ihn als Ellypse, deren Brennpunkte zusammenfallen, und diese als Kreis, dessen Centrum bis zur Linie gedehnt ist, gewissermaaßen sich vorstellen kann, so suchte ich eine Construktion der Ellypse aus dem Kreise, um wenigstens diejenigen Verhältnisse und Aufgaben, die sich in Beziehung auf die Kreise der Axen finden und lösen lassen, dem Werke noch beyzugesellen. Alles in eine Tabelle einzuengen war ohne Verkümmerung der Figuren nicht wohl möglich, daher entstanden zwey, deren Inhalt aber eigentlich doch nur einer ist.

Fig. 1 und 2. enthalten die freye Construktion der Ellypse aus dem Kreise.

Fig. 3. enthält die Construktion der Ellypse, vermittelst der durch No. 1 und 2 erkannten Eigenschaft, daß sich die Ordinaten der Ellypse zur correspondirenden Ordinate des Axenkreises sich verhalten, wie die kleine Axe zur großen Axe.

Fig. 4. bestimmt die Brennpunkte, und macht anschaulich, daß der Endpunkt der kleinen Axe um die halbe große Axe von jedem Brennpunkt entfernt ist.

Fig. 5. lehrt, an einen gegebenen Punkt einer Ellypse eine Tangente zu ziehen, und zwar, wie in allen folgenden Aufgaben, durch Reduktionen der Punkte und Linien auf den correspondirenden Axenkreis, und dann rückwärts auf die Ellypse, vermög des Ordinatenverhältnisses.

Fig. 6. löst die Aufgabe: aus einem gegebenen Punkt in der Verlängerung der großen Axe eine Tangente an die Ellypse zu ziehen.

Fig. 7. enthält die Aufgabe; aus einem gegebenen Punkt in der Verlängerung der kleinen Axe, eine Tangente an die Ellypse zu ziehen.

Fig. 8. Aus einem gegebenen Punkt ausserhalb der Verlängerung einer der Axen, eine Tangente an die Ellypse zu ziehen.

Fig. 9. Der Winkel, den eine Ellypsentangente mit der großen Axe macht, ist bekannt, man soll die Tangente ziehen.

Fig. 10. Es ist ein Winkel bekannt, dessen einer Schenkel Tangente einer Ellypse ist, und in dessen andern Schenkel die große Axe liegt. Ferner kennt man die große und kleine Axe, man soll den Berührungspunkt der Tangente finden.

Fig. 11. Es ist ein Winkel bekannt, dessen einer Schenkel Tangente einer Ellypse seyn soll, und in dessen Schenkel die kleine Axe liegt. Ferner kennt man die große und kleine Axe, man soll den Berührungspunkt der Ellypse finden.

Fig. 12. Zu einer gegebenen Sekante den Punkt zu finden, wo sie die Ellypse schneidet.

Fig. 13. Die Entfernung eines Punkts der Ellypse vom Mittelpunkt ist gegeben, man soll den Punkt geometrisch in der Ellypse bestimmen.

Anhang.

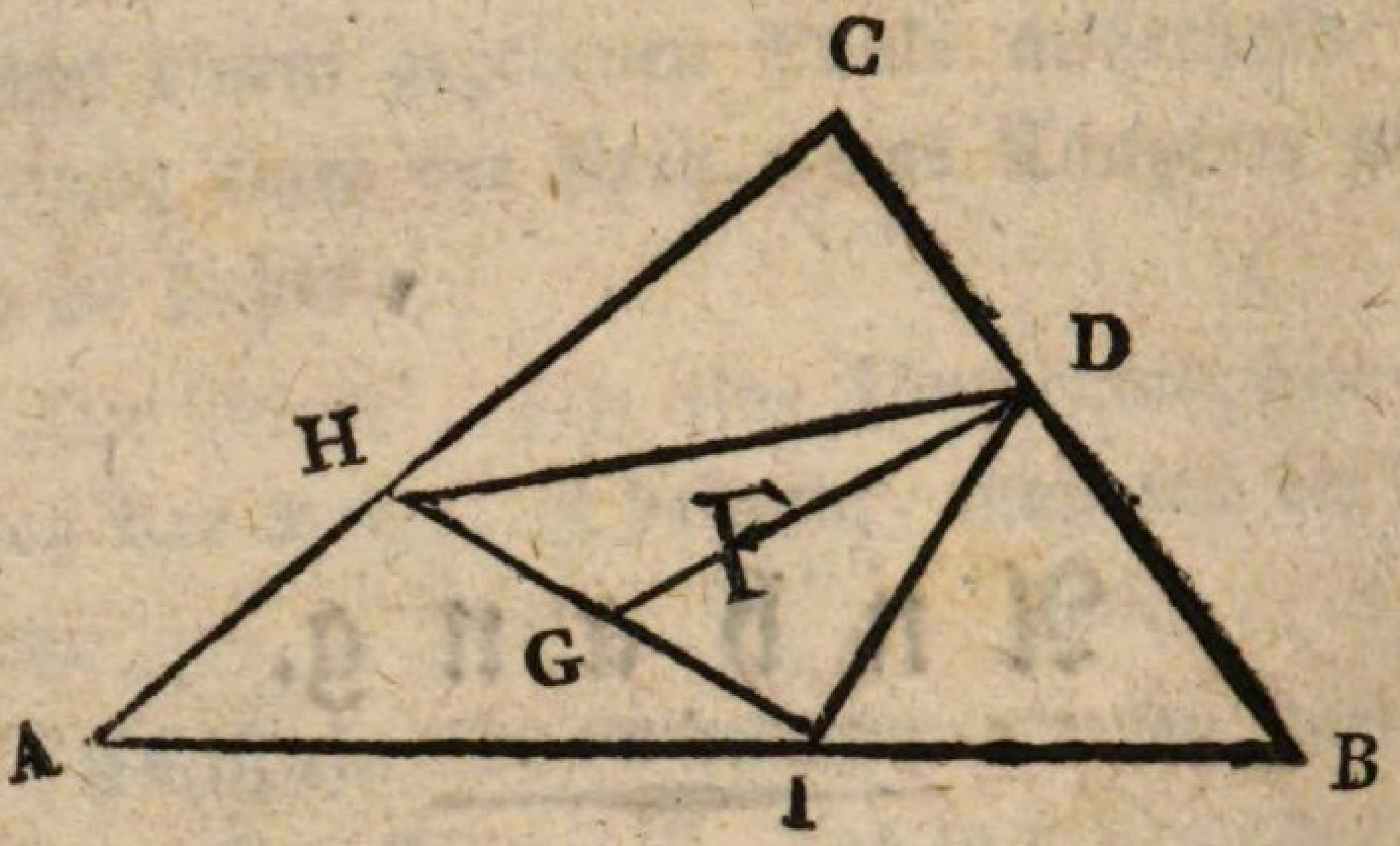
Da es Manchen nur an einzelnen Beyspielen fehlt, woran sie abnehmen, wie neue Aufgaben zu bilden sind, so will ich hier zum Schluß ein solches liefern, und zwar um diesen Zweck besser zu erreichen mit ausführlicher Auseinandersetzung der Auffindung, Auflösung und ganzen Verfahrungsweise. — Den Begriff vom Schwerpunkt überhaupt, und hauptsächlich von dem, was man vom Schwerpunkt der Linien und Flächen *) zu denken hat, setze ich voraus.

Aufgabe.

In ein gegebenes Dreyeck ABC soll von einem gegebenen Punkt D in einer Seite CB ein anderes Dreyeck verzeichnet werden, das mit dem gegebenen gleichen Schwerpunkt hat.

*) Anmerk. Der Ausdruck Schwerpunkt von Linien und Flächen ist höchst unangemessen. Weit richtiger und auch von uns Deutschen anzunehmender ist der des Professor l'Huilier in Genf, welcher gedachten Punkt le centre des moyennes distances nennt.

Auflösung.



Der Schwerpunkt jeder geraden Linie ist ihr Mittelpunkt: stellt man sich ein Dreyeck durch die parallele Bewegung einer geraden Linie erzeugt vor, die in einer arithmetischen Progreßion abnimmt, und endlich in der Spitze des Dreyecks ein Punkt wird, so sieht man wohl von selbst ein, daß während ihrer Bewegung ihr Schwerpunkt mitwandelt, und die gerade Linie von seinem anfänglichen Ort bis zur Spitze des Dreyecks beschreibt, folglich auch in dieser Linie der Schwerpunkt des Dreyecks liegen müsse. Da man aber jede Seite als die erzeugende annehmen kann, und obige Schlüsse auf jede derselben paßen, so hat man, um den Schwerpunkt eines Dreyecks zu erhalten nur nöthig, von den Mittelpunkten zweyer Seiten nach der gegenüberstehenden Spitze gerade Linien zu ziehen. Ihr Durchschnittspunkt ist der gesuchte Schwerpunkt. Man kann also den Schwerpunkt F des Dreyecks A B C als gegeben annehmen. Um die jetzt zunächst sich ergebende Frage, in welcher Entfernung von der Spitze und dem Mittelpunkt der gegenüberstehenden Seite sich dieser so gefundene Schwerpunkt befindet, zu beantworten, denke man sich eine gerade Linie zwischen

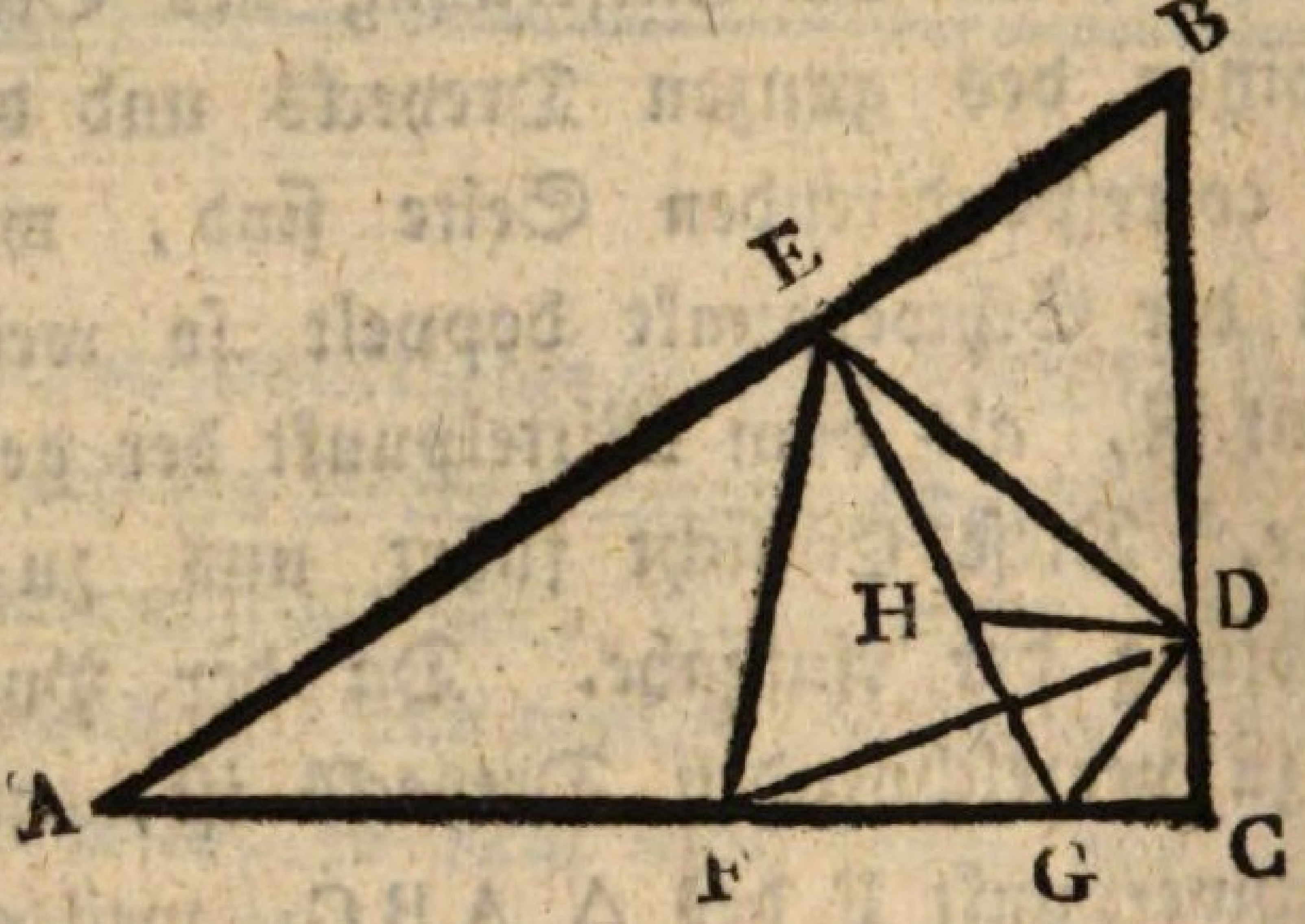
den Mittelpunkten der zwey Dreyecksseiten, von wo aus man zu Findung des Schwerpunkts eben erwähnte zwey gerade Linien gezogen sich dachte, so wird man aus leicht einzusehendem Grunde finden, daß diese Verbindungslinie der zwey erwähnten Mittelpunkte parallel mit der dritten Dreyecksseite ist, folglich zwey ähnliche Dreyecke bildet, wovon der Schwerpunkt die gemeinschaftliche Spitze ist, und woran die parallelen Seiten sich wie 1 : 2 verhalten, folglich auch die übrigen Seiten der Dreyecke, welche Seiten nichts anders, als die Entfernung des Schwerpunkts von den Spitzen des ganzen Dreyecks und den Mittelpunkten der correspondirenden Seite sind, woraus sich ergiebt, daß der Schwerpunkt doppelt so weit von der Spitze entfernt ist, als vom Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Diese Einsicht führt uns zu folgender leichten Auflösung der Aufgabe. Da der Punkt D eine Spitze des zu verzeichnenden Dreyecks ist, und folglich von dem Schwerpunkt F des Δ ABC, weil er auch des zu verzeichnenden Dreyecks Schwerpunkt seyn soll, doppelt so weit entfernt seyn muß, als F von dem Mittelpunkt der gegenüberstehenden Seite, so verlängere man die Linie DF nach G, so daß $FG = \frac{DF}{2}$ ist, und nun ziehe man durch den Punkt G eine gerade Linie in den $\angle$ CAB, welche vom Punkt G halbirt wird. Von den beyden Endpunkten dieser Linie HI (deren Verzeichnungsweise jedem der das Vorhergehende versteht, von selbst einfällt, und hier zur Texterſparung weggelassen ist) nach D gerade Linien, so ist das dadurch entstandene Dreyeck DHI das verlangte.

Aufgabe.

In ein gegebenes Dreyeck ABC von einem in einer

Seite desselben liegenden Punkt D ein Dreyeck zu verzeichnen, das einem andern Dreyeck ähnlich, dessen Form also bestimmt z. B. gleichseitig sey. (Ist das einzuverzeichnende Dreyeck nicht gleichseitig, so muß der ∠ bey D noch bekannt seyn, um Verfahrungswiederholung zu ersparen.)

Auflösung.



Stellt man sich die Aufgabe als aufgelöst vor, so daß z. B. △ DEF das zu verzeichnende △ sey; ferner auf irgend eine vom Punkt D willkührlich gezogene Linie DG, ein dem Dreyeck DEF ähnliches Dreyeck DHG, so wird man folgendes gewahr.

1. DE : DF = DH : DG p. Const. als homologe Seiten ähnlicher Dreyecke.

Daher auch 2. DE : DH = DF : DG.

3. ∠ EDH = ∠ GDF, weil von den gleichen Winkeln EDF und HDG derselbe Winkel FDH hinwegkam, (der in andern Fällen hinzukommt,) folglich ist auch, wenn die Linie EH gezogen wird

△ EHD ∽ △ FDG

also ∠ DGF oder ∠ DGA = ∠ DHE.

Diese Bemerkung führt zu folgender Auflösung der Aufgabe.

1) Vom Punkt D ziehe man irgend eine gerade Linie DG.

2) Verzeichne auf dieselbe ein Dreyeck HDG, welches die gegebene Form hat, also im gegenwärtigen Falle gleichseitig ist. Fällt der Punkt H in die dritte Seite des gegebenen Dreyecks, so ist DHG das zu verzeichnende Dreyeck, was aber höchst selten der Fall seyn wird, weil dieser voraussetzt, daß man die ganz willkührlich gezogene Linie DG zufälligerweise richtig angenommen habe. Ist sie es also nicht, so zeichne man

3) an DH einen ∠ DHE = ∠ DGA, so erhält man durch Ziehung der Linie DE eine Seite des zu verzeichnenden Dreyecks, worauf man

4) nur die anliegenden bekannten Winkel zu verzeichnen braucht, um das Dreyeck zu vollenden. —

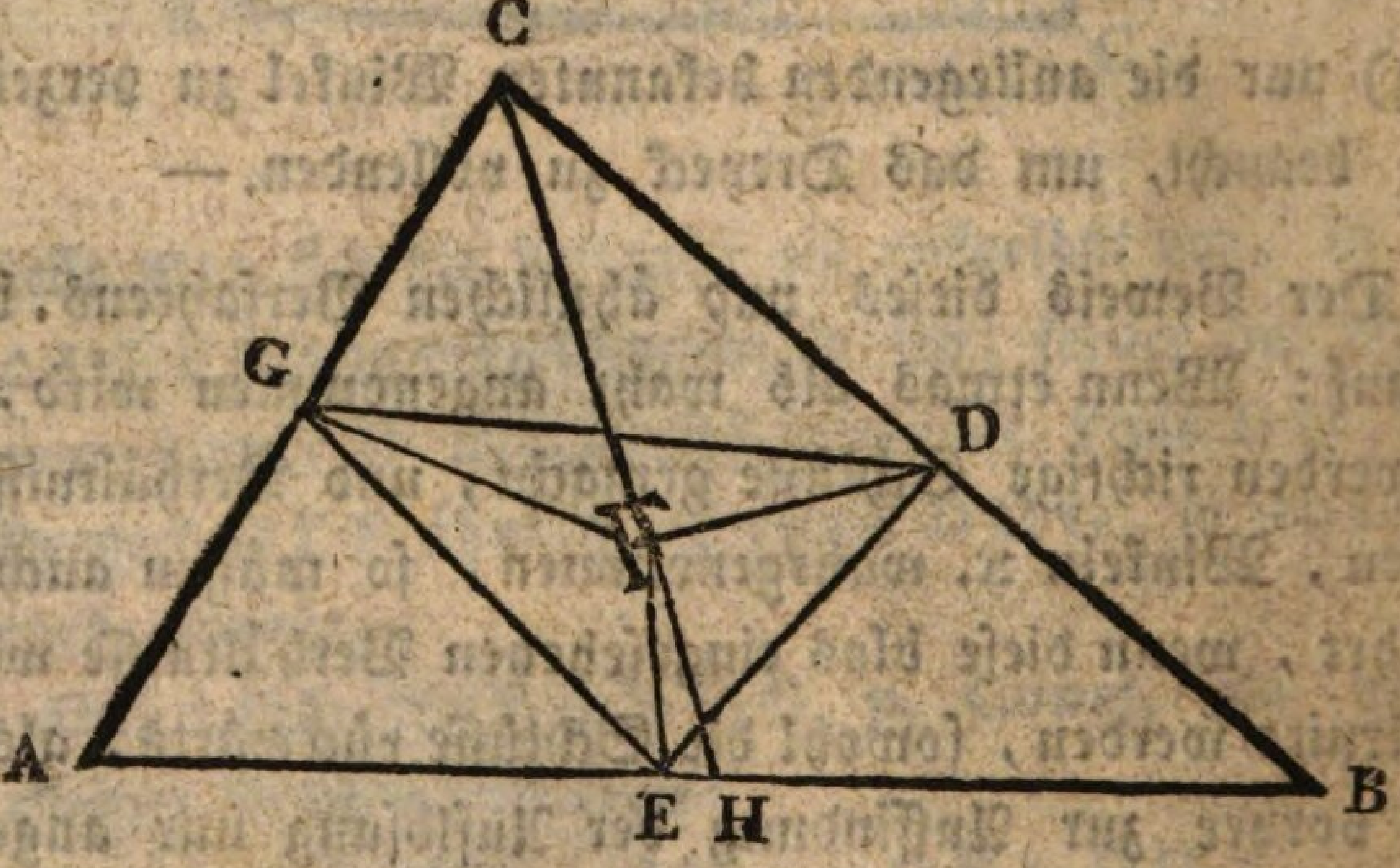
Der Beweis dieses und ähnlichen Verfahrens beruht darauf: Wenn etwas als wahr angenommen wird, und es werden richtige Schlüsse gemacht, und Verhältnisse von Linien, Winkeln ꝛc. wahrgenommen, so müssen auch umgekehrt, wenn diese blos eingesehenen Verhältnisse wirklich construirt werden, sowohl die Schlüsse rückwärts, als auch das vorher zur Auffindung der Auflösung nur angenommene Wahre, das Wahre wirklich seyn. Hierinn besteht hauptsächlich die von der Platonischen Schule zuerst angebahnte Untersuchungsweise bey Construktionen. — Beyde Aufgaben, wovon ich die erste noch während meiner Studienzeit in Paris auflöste, wurden mir von Hrn. Major Tulla, meinem verehrten Lehrer gegeben. Als ich die

Auflösung beyder hatte, dachte ich, wenn ich das Datum der Lage des Punkts D in der Aufgabe hinweg lasse, so kann ich eine Bedingung mehr fordern, und so bildete ich mir mehrere Aufgaben, wovon ich aber nur folgende hier anführe, weil sie die beyden vorigen in sich faßt, und diese die Veranlassung gaben.

Aufgabe.

In ein gegebenes Dreyeck ABC ein anderes Dreyeck zu verzeichnen, das mit dem gegebenen denselben Schwerpunkt hat, und zugleich irgend einem andern Dreyeck ähnlich ist.

Auflösung.



Stellt man sich die Aufgabe als aufgelöst vor, so daß z. B. Δ DEG das zu verzeichnende Δ sey, und folglich mit ABC den nämlichen Schwerpunkt F und die bestimmte Form habe, ferner die Linien FD, FG und FE gezogen, so sieht man leicht ein, daß auch die dadurch

entstandenen Dreyecke GFD. DFE und GFE der Form nach bekannt sind, und da ihre gemeinschaftliche Spitze F der Lage nach gegeben, so ergiebt sich, daß durch die Ziehung der geraden Linie CH durch den Schwerpunkt F die ganze Aufgabe auf die vorhergehende reduzirbar ist: denn da offenbar erhellet, daß, wenn in das gegebene Dreyeck irgend eine der von den Spitzen durch den Schwerpunkt gehenden drey gerade Linien gezogen wird, z. B. CH in das dadurch entstehende Δ ACH von F aus eins der drey der Form nach bekannten Dreyecke GFE, EFD und GFD verzeichenbar seyn, und die dadurch gefundene Linie EG eine Seite des zu verzeichnenden Dreyecks seyn muß. Es ist also diese Aufgabe auf eine höchstens zweymalige Wiederholung der vorhergehenden reduzirt. Ist das zu verzeichnende Dreyeck gleichschenklicht, so ist höchstens eine einzige, und wenn es gleichseitig ist, keine Wiederholung nöthig. Die geschickte Auswahl der Theilungslinie CH und die sinnvolle Anschauung des gegebenen Dreyecks, und der Form des zu verzeichnenden hilft hier viel. Zum Ueberfluß will ich Punkt für Punkt die Auflösung angeben, welche dem aufmerksamen Leser genügen wird, um sie gleich machen zu können.

1) Man suche den Schwerpunkt des Dreyecks, dem das zu verzeichnende ähnlich seyn soll.

2) Von diesem Schwerpunkt ziehe man nach den drey Ecken gerade Linien, so entstehen drey der Form nach ebenfalls bekannte Dreyecke.

3) Von einer Ecke des gegebenen Dreyecks, worin das Dreyeck verzeichnet werden soll, ziehe man durch den Schwerpunkt eine gerade Linie, so entstehen zwey Dreyecke.

4) In eins dieser Dreyecke zeichne man ein Dreyeck, dessen eine Spitze der Schwerpunkt des gegebenen Dreyecks ist, und das einem der drey in Nro. 2 gefundenen Dreyecke ähnlich ist.

5) An dieses Dreyeck zeichne man nach der Aehnlichkeitslehre die zwey übrigen in Nro. 2 gefundenen Dreyecke, in der dort gefundenen Lage, so entsteht das gesuchte, wenn der dritte Punkt in eine Seite des gegebenen Dreyecks fällt.

6) Ist letzters nicht der Fall, so wird Nro. 4, wiederholt mit einem andern der dort erwähnten Dreyecke.

Druckfehler.

Seite	Zeile	
Seite 2	Zeile 20	lies: viel, statt viele.
— 4	— 13	laß *minder einer* weg.
— 4	— 13	l. Linien, st. Linie.
— 7	— 2	fehlt hinter Richtung das Wort *haben*.
— 9	— 28	l. Nebenwinkel, st. Winkel.
— 11	— 17	l. außerhalb der Richtung der Linie, st. außerhalb der Linie.
— 14	— 5	l. daß man, st. daß wenn man.
— 16	— 2	l. kleinere, st. größere.
— 16	— 8	l. enthalten, st. enthält.
— 16	— 22	l. Schenkel, st. Winkel.
— 20	— 6	l. etwas, st. was.
— 38	— 14	l. der gleichen, st. dergleichen.
— 39	— 3	l. nun, st. nur.
— 47	— 2	von unten l. dem gegebenen Punkte, st. den gegeben Punkten.
— 48	— 20	l. den gleichen, st. der gleichen.
— 49	— 24	l. Schenkelpunkte, die, ꝛc. st. Schenkelpunkt (die, ꝛc.
— 50	— 22	l. schneidet, st. scheidet.
— 51	— 8	sind die Worte *Siebente Aufgabe* vorzusetzen.
— 53	— 5	ist: z. B. auszustreichen.
— 56	— 20	l. derjenigen Gegend, st. ganzen Gegend.
— 56	— 24	l. zwey Winkeln, st. den Winkeln.
— 57	— 26	l. den dritten Punkt, st. der dritte Punkt.
— 61	— 23	l. machten, st. machen.
— 61	— 24	l. in dieser, st. in diesen.
— 62	letzte Zeile,	l. mit, st. auf.
— 67	— 1	fällt, über die, weg.
— 68	— 26	l. eine gerade Linie, st. eine Linie.

Seite 77 Zeile 13 lies: Endpunkt, st. Punkt.
— 80 — 24 l. Verhältnißlinien, st. Verhältnißlinie.
— 81 — 7 l. dritten, st. andern.
— 83 — 8 l. zwar in, st. zwey.
— 99 — 13 l. von der Summe der Katheten, woran aber die Quadrate der Katheten Theile sind, das ꝛc.
— 99 — 23 — 24 l. Katheten, folglich ꝛc. (Fig. III.) Ist das ꝛc. st. Katheten, (Fig. III.) folglich ist.
— 100 — 29 l. Rechtecke, st. Rechte.
— 120 — 10 füge man hinzu: oder noch kürzer: man nehme die Diagonale des gegebenen Quadrats doppelt, so ist diese die Seite des achtmal größern Quadrats.
— 122 — 28 l. der, st. die.
— 129 — 6 l. in zwey gleiche Theile ꝛc.
— 133 — 15 l. Fußpunkte, st. Vereinigungspunkte.
— 135 — 16 l. Verlängerung, st. Verbindung.
— 138 — 10 l. verlängerten, st. verlangten.
— 138 — 14 l. Durchschnittspunkt, st. durchschnittenen.
— 139 — 9 von unten, l. Berührungspunkt, st. Durchschnittspunkt.
— 140 — 3 l. Endpunkt, st. Abschnittspunkt.
— 143 — 21 l. räumlichen, st. nämlichen.
— 146 — 3 l. andern, st. geraden.
— 146 — 9 l. Ebenen, st. Ebene.
— 147 — 2 von unten, l. wenn man von irgend ꝛc.
— 148 — 22 l. die rechtwinklichte Durschnitts-Ebene.
— 148 — 23 l. sind. Von ꝛc. st. sind, von.
— 149 — 29 l. Kanten, st. Karten.
— 164 — 6. l. aufstehend, st. aufsehend.
— 170 lies: Algorithmus, st. Allgorithmus.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

A.
Fig. a
B
Fig. b

ch

yr

$\frac{1}{2}$

bl

Geomet

Zur

Zeichnung der

Fig I
I.
I.
VI.
Fig VI.
VI.

cher Dreye
.V.
Fig: VI.
Fig: VII. A.
Fig: VII. B.
Fig: VIII.

Zeichnung Anl…

stru

Fig.A.
Fig.B.
Fig.C.
Fig.D.

Vergleichung der Fläc[...]

Fig. I

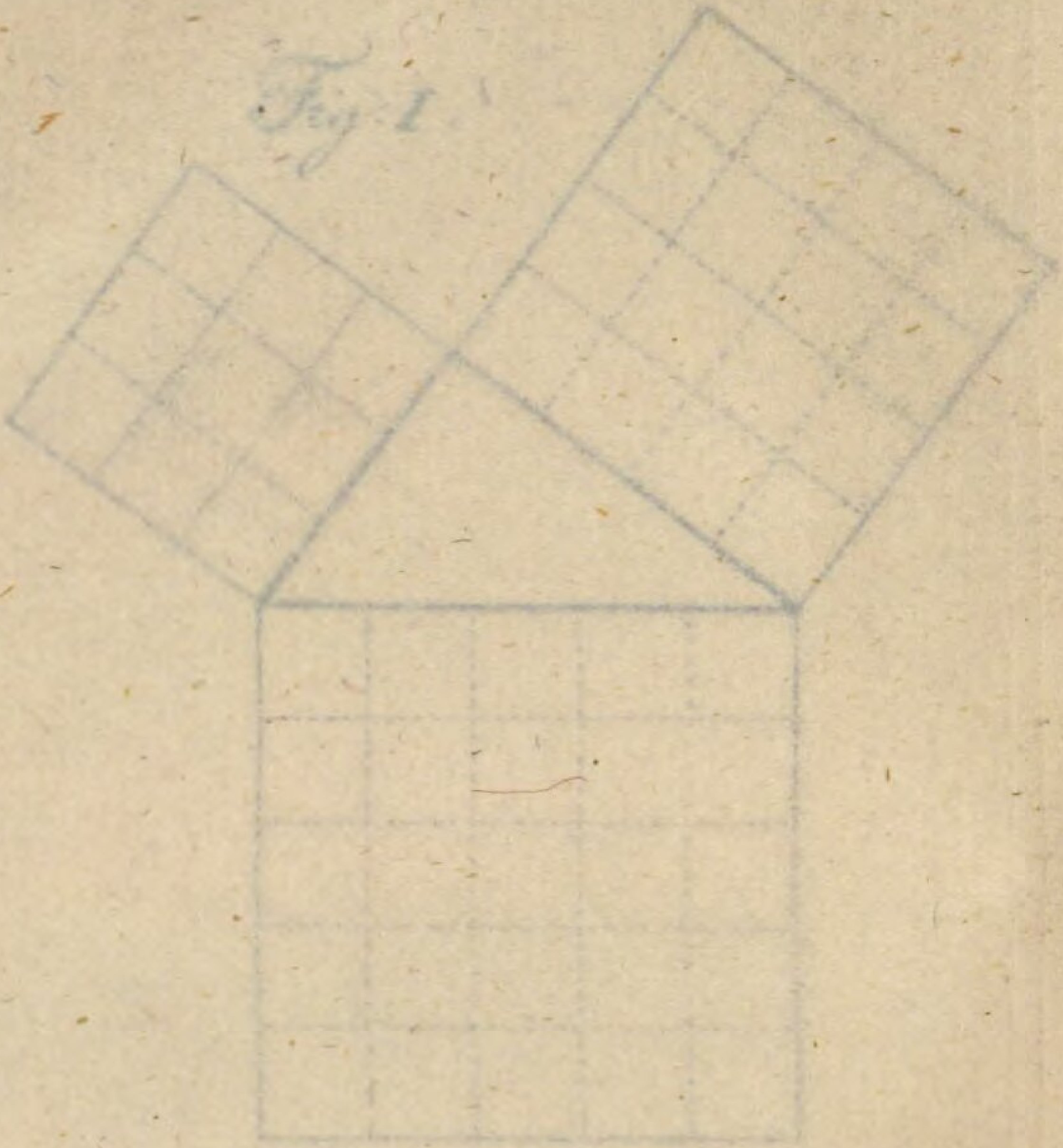
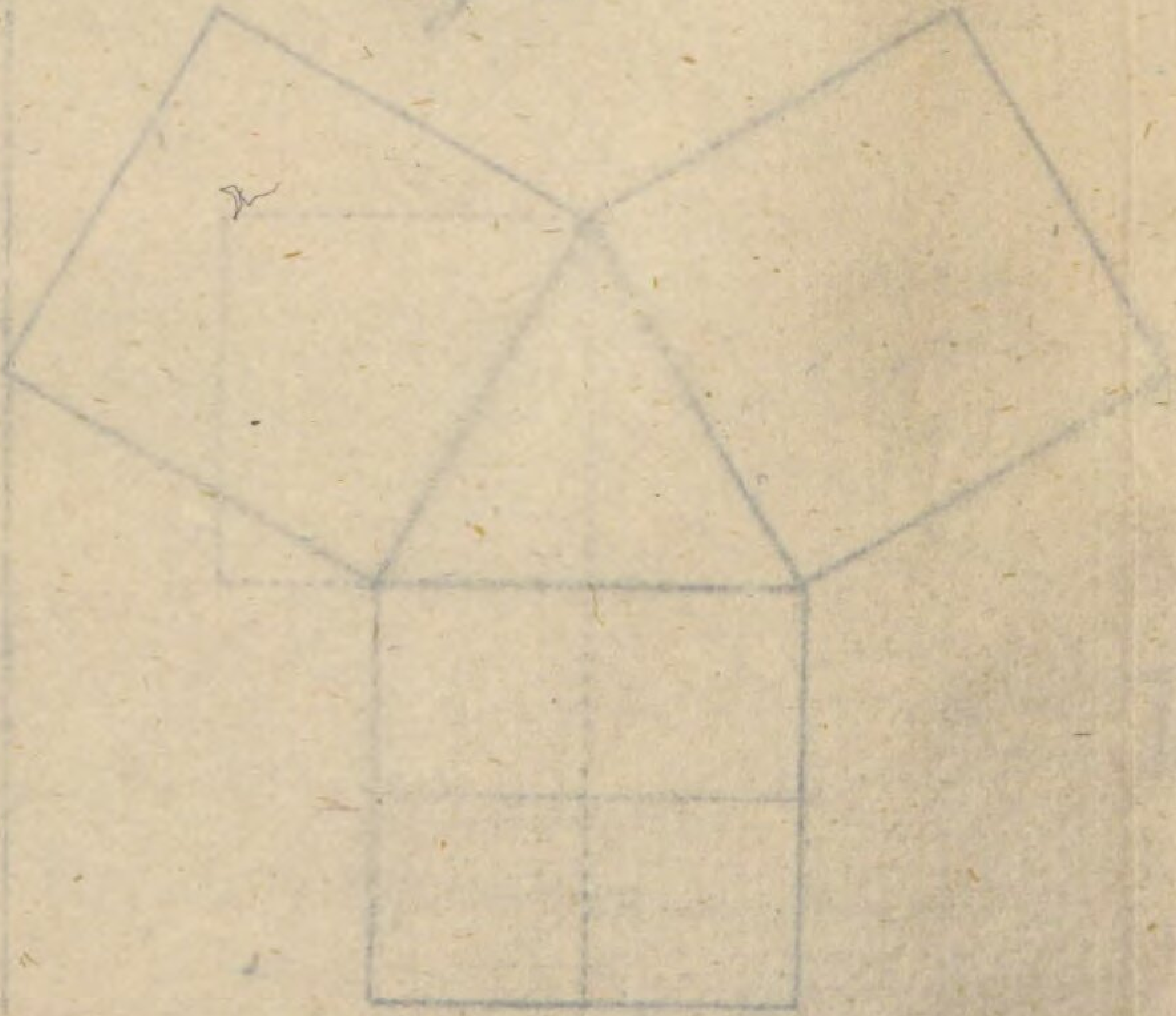


Fig. IV



Zeichnung

Fig. I.

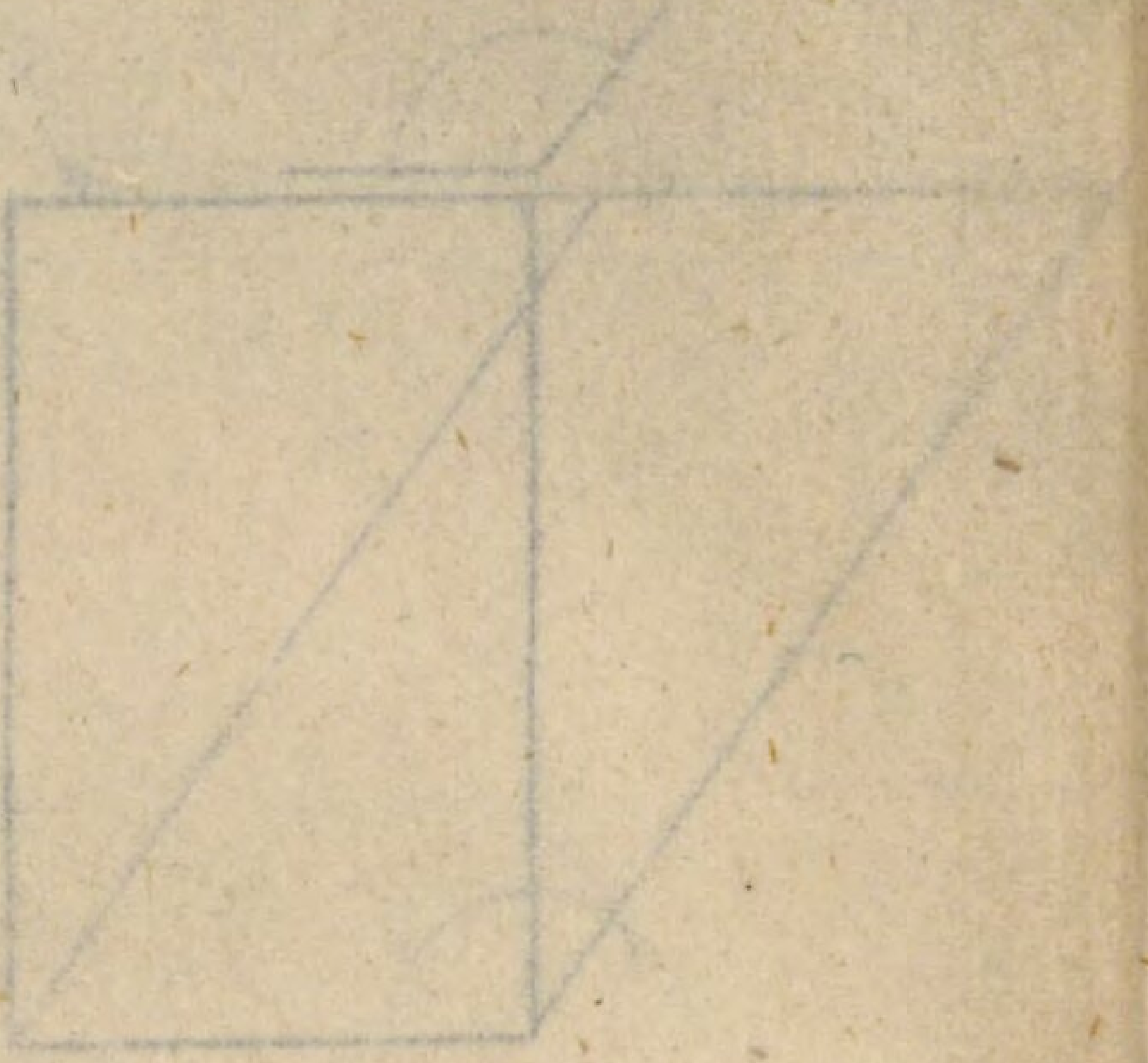


Fig. II.

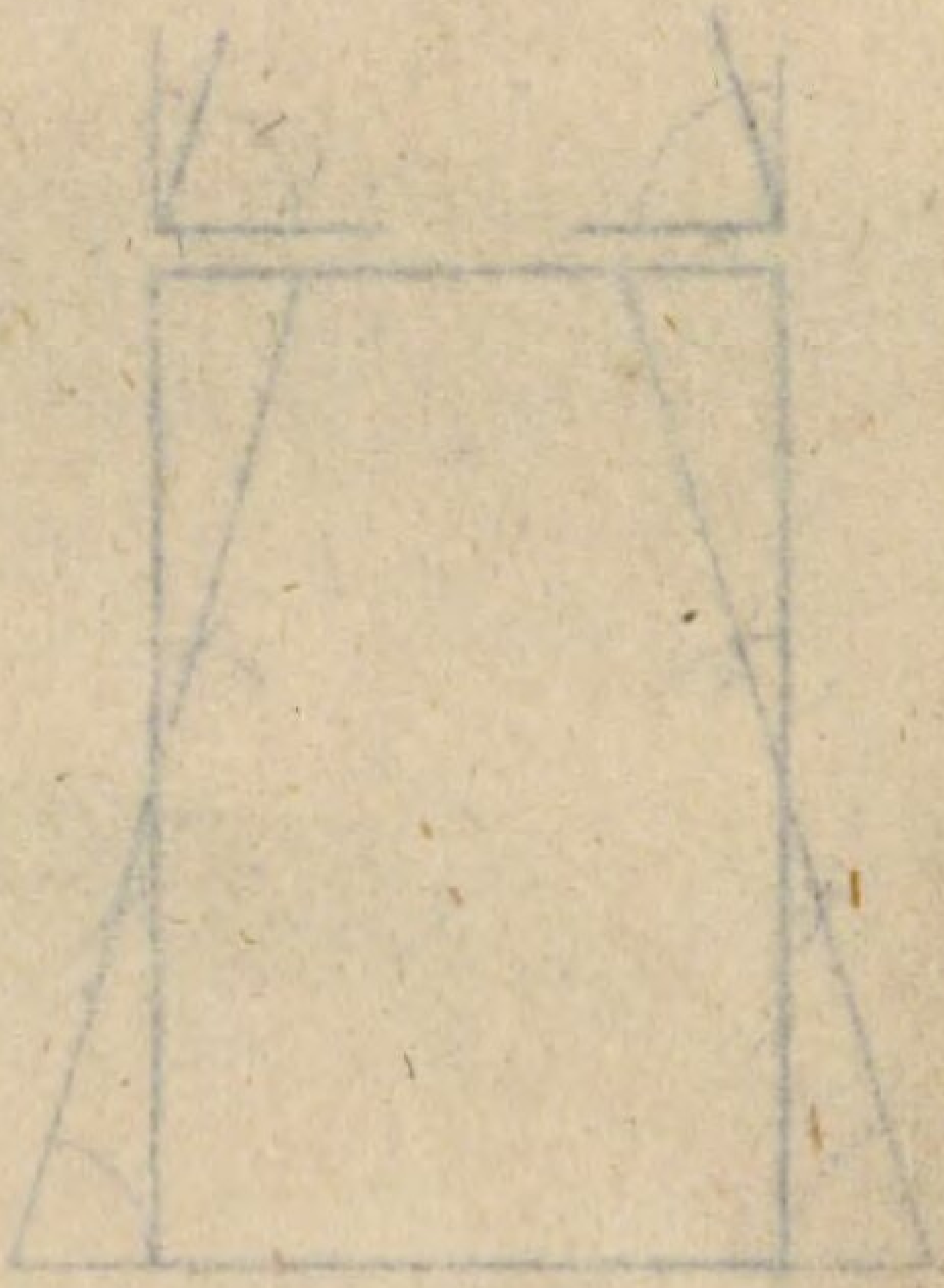


Fig. III.

Fig. V.

Algorithmus

Fig. I

Fig. II

Fig. VII

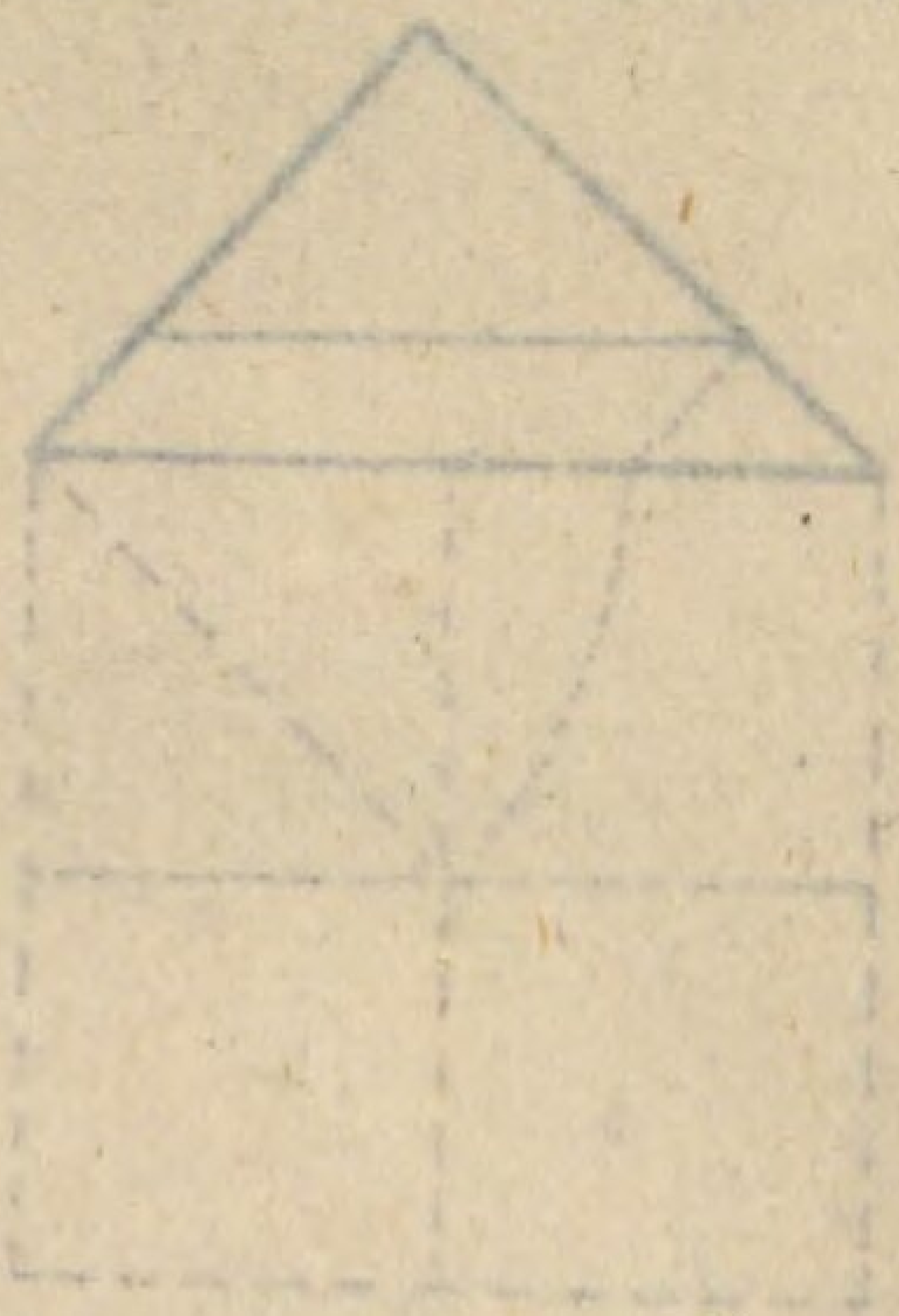
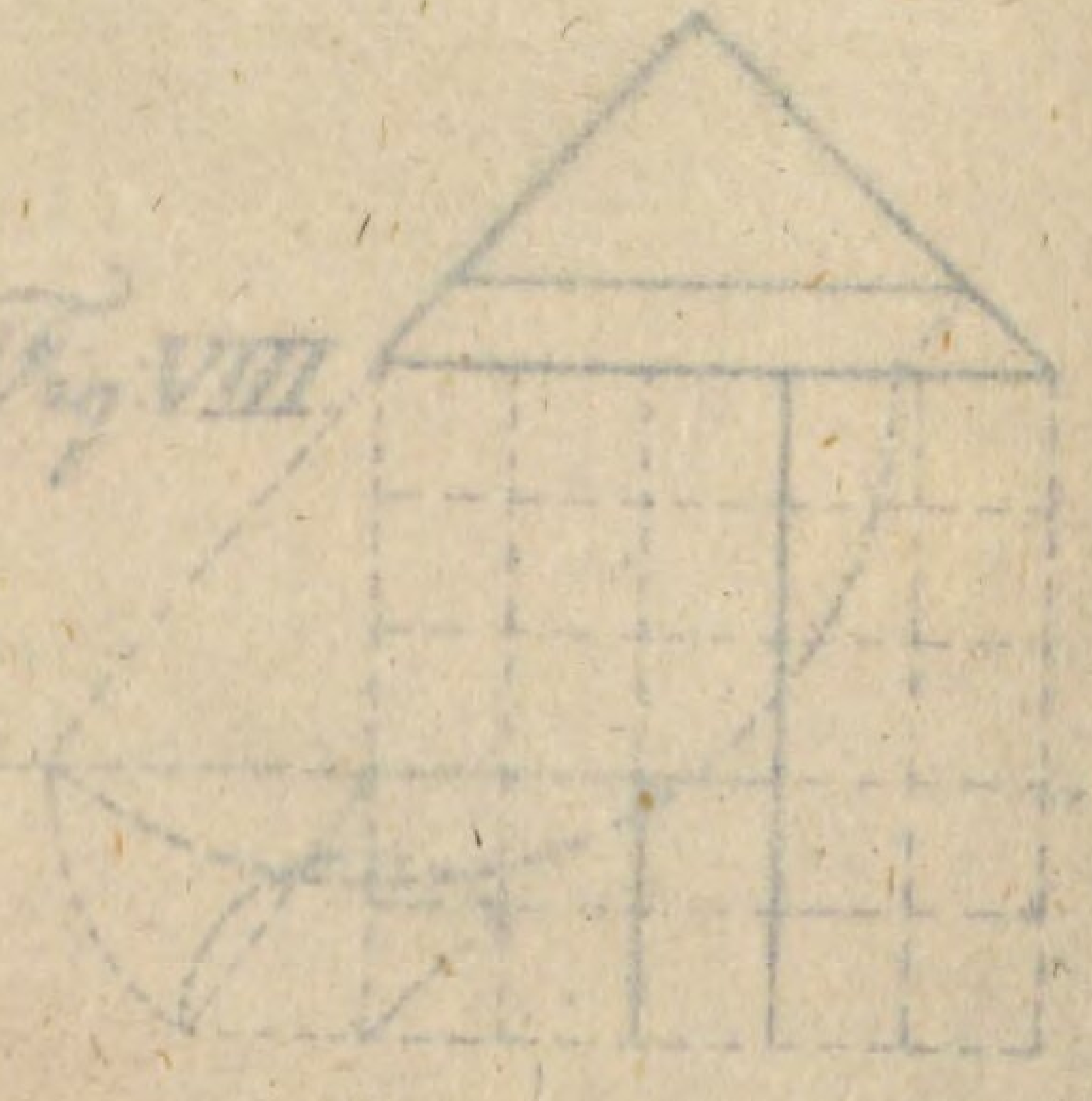


Fig. VIII



Linie

g. II.

g: VII

Verbindung eines Kreises und 2 gerade

fig I.

fig VI

fig XI

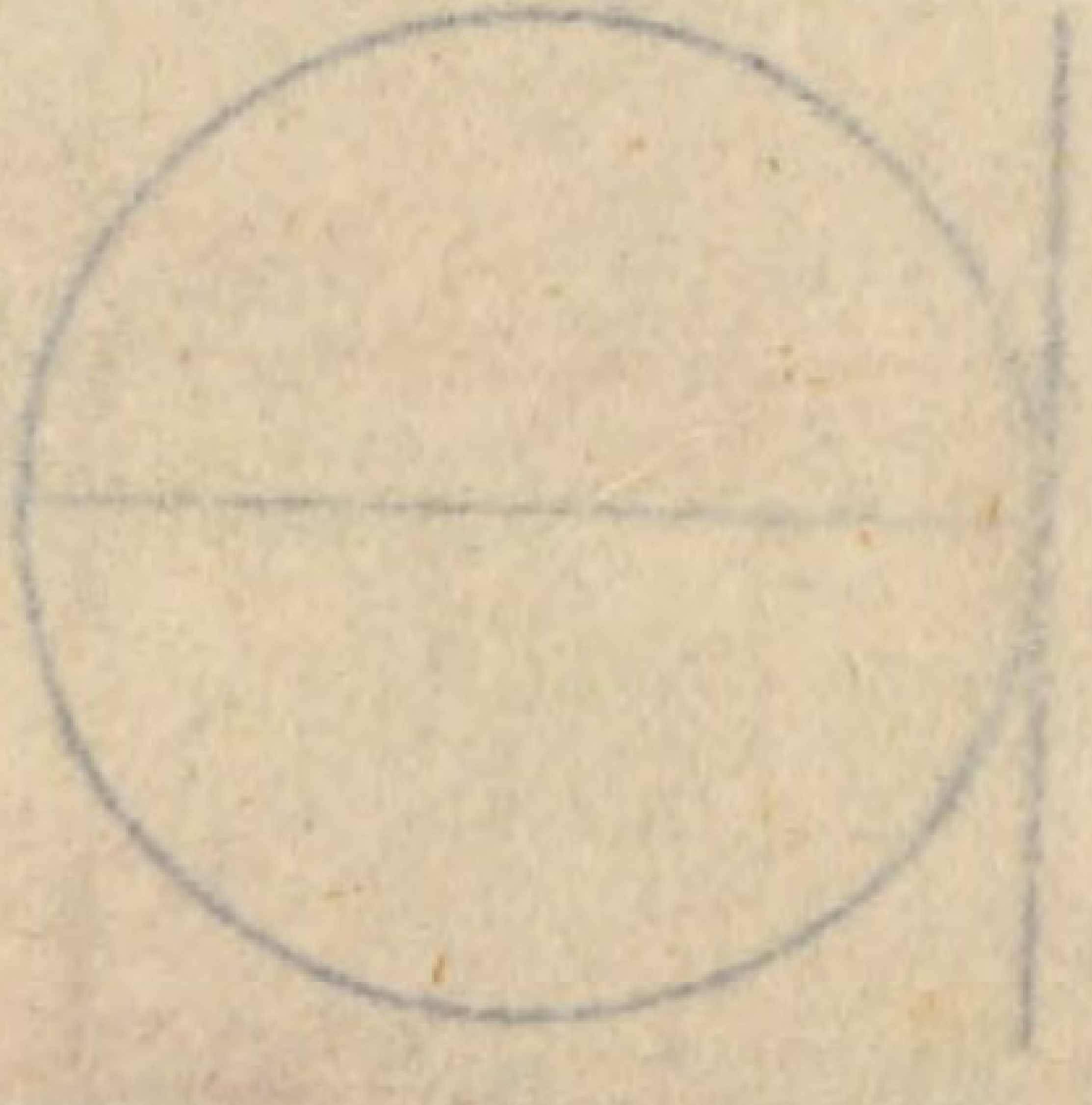


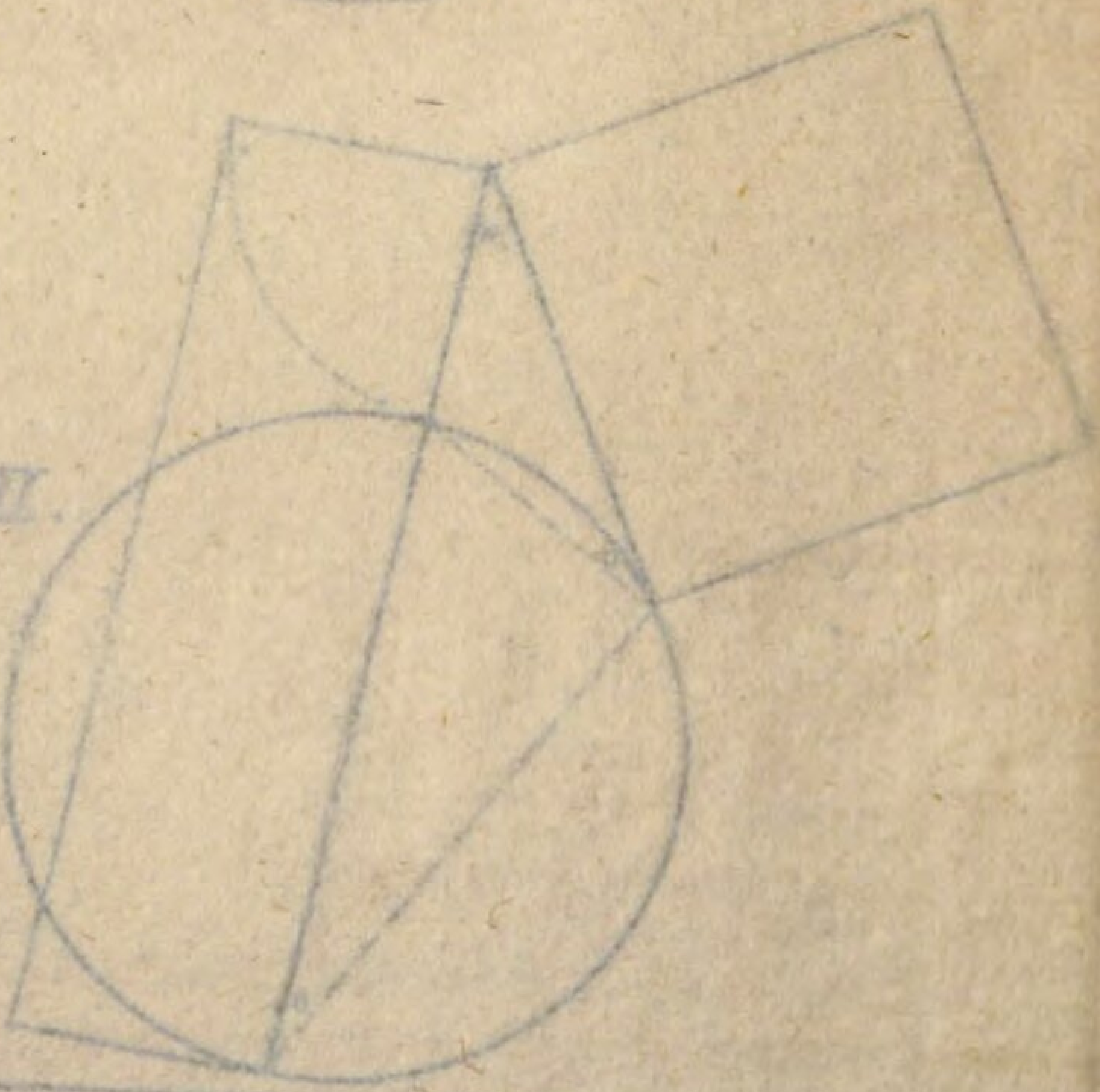
Fig XII

Verbindung eines Kreises und

Fig. I.

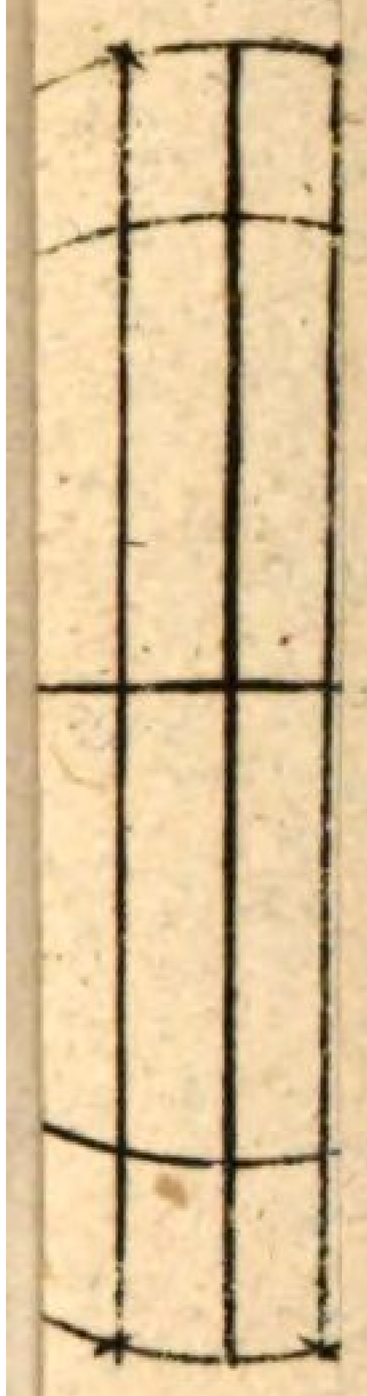
Fig. IV.

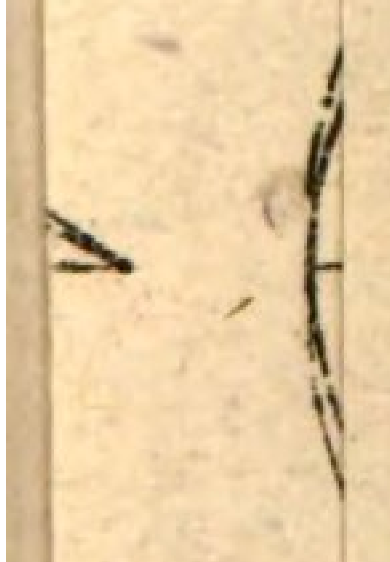
Fig. VIII.



Aufg

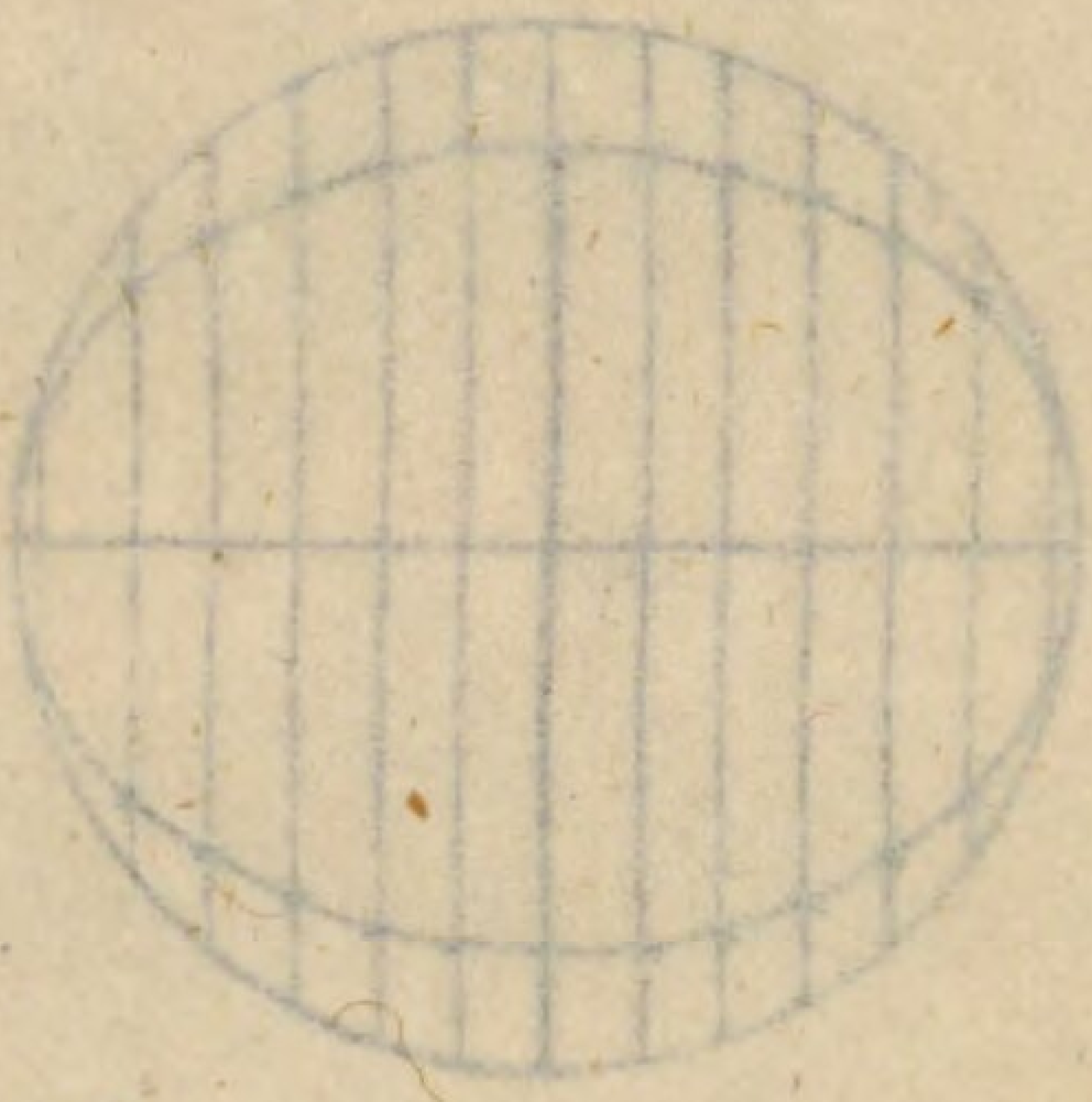
Fig.





...erbindung eines Kreises und ...

Fig. I



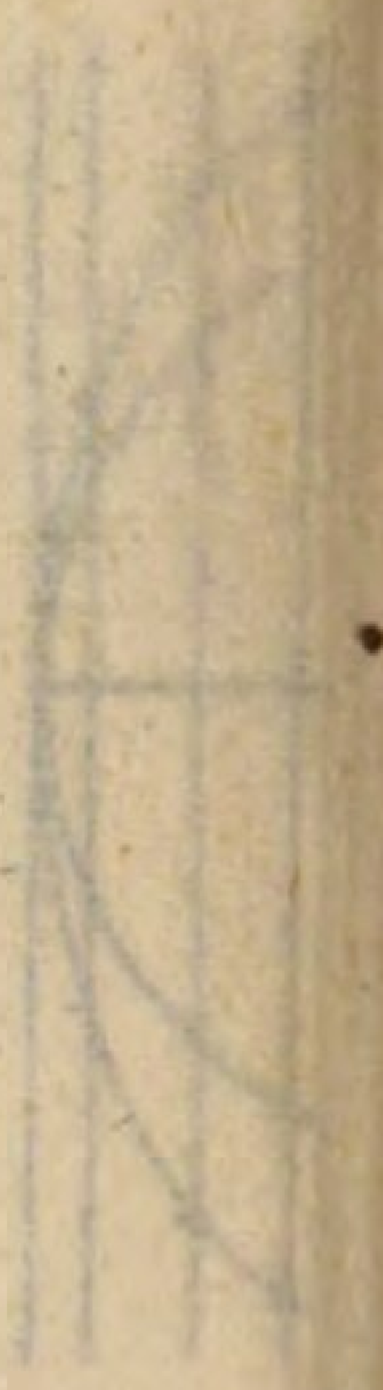
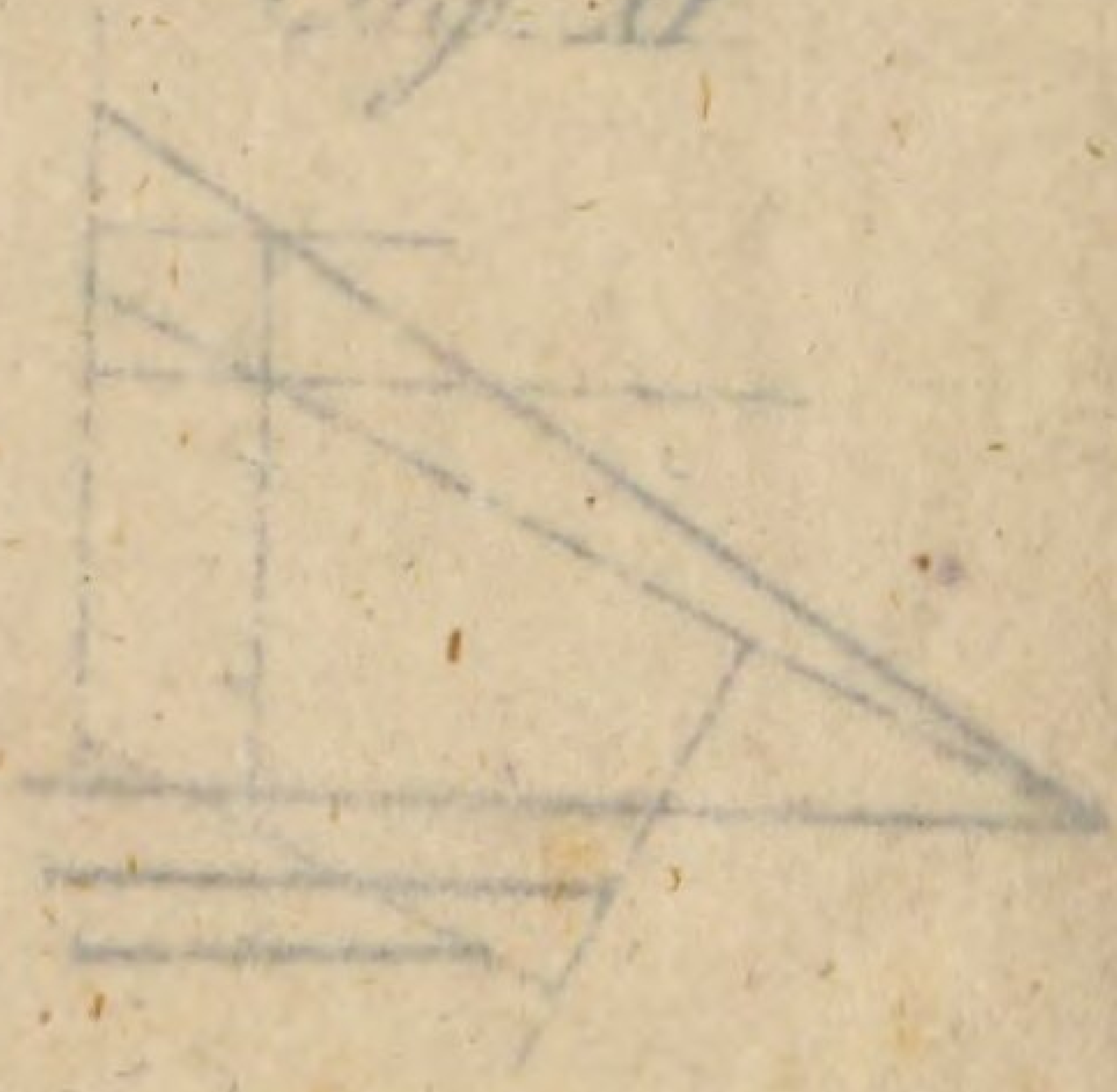


Fig. V

Aufg

Fig. VIII

Fig. XI



196
uchne
inde
096-Hohen

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ladomus, Johann Friedrich,

Geometrische Constructionslehre für Lehrer und Lernende ; [in 17 K.]

Bd.: 1 (1812)

Freyburg 1812

Math.p. 270 m-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082215-1